Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 2:95-101 (1991)

Storia della matematica. — *I contributi di Gaetano Scorza alla Teoria dei Gruppi.* Nota (*) del Socio Guido Zappa.

Abstract. — *The papers of Gaetano Scorza on Group Theory.* The papers of Gaetano Scorza (1876-1942) on the Theory of Groups are examined.

Key words: History of Algebra; History of groups; History of representations of groups and rings.

Riassunto. — Vengono esaminati i contributi di Gaetano Scorza (1876-1942) alla Teoria dei Gruppi.

1. Introduzione

Nel 1989 è caduto il cinquantenario della morte di Gaetano Scorza, che fu Socio Corrispondente di questa Accademia a partire dal 1926, e Socio Nazionale dal 1937. Poiché io fui suo allievo e conservo un vivo ricordo di lui e una profonda gratitudine nei suoi riguardi, ho inteso intraprendere uno studio sopra i suoi contributi alla Teoria dei Gruppi.

Nato a Morano Calabro nel 1876, Gaetano Scorza fu allievo della Scuola Normale Superiore di Pisa. Divenne professore nella Università di Cagliari nel 1912, per passare poi in quella di Parma nel 1913 e in quella di Catania nel 1916. Nel 1921 fu chiamato nell'Ateneo di Napoli, e nel 1935 in quello di Roma. La morte lo colse nel 1939, ad appena 63 anni di età, quando era ancora nel pieno della sua attività scientifica e didattica.

Le sue opere più importanti riguardano la Geometria algebrica e la Teoria delle Algebre. La sua fama è legata in modo particolare alle Memorie sulle Funzioni abeliane e le Matrici di Riemann. I suoi lavori di Teoria dei Gruppi hanno avuto per lo più carattere occasionale, e quindi non sono al centro della sua attività scientifica. Tuttavia, come vedremo, anch'essi contengono contributi notevoli, e hanno indicato strade che altri avrebbero percorso con successo.

I lavori dedicati alla Teoria dei Gruppi sono 8, e sono concentrati tutti, tranne l'ultimo, nel periodo tra il 1925 e il 1928. Ben 6 di essi sono pubblicati nei Rendiconti di questa Accademia; gli altri 2 nel Bollettino della Unione Matematica Italiana. Essi possono dividersi, in base all'argomento trattato, in tre classi: *a*) Argomenti vari; *b*) Sottogruppi fondamentali di un gruppo; *c*) Rappresentazione di gruppi e algebre di gruppo.

2. Lavori di argomenti vari

In una *Nota* del 1926 [13] Scorza, dopo avere osservato che un gruppo non può mai essere esaurito dagli elementi di due suoi sottogruppi propri, si pone il seguente problema: determinare tutti i gruppi (finiti o no) che siano esauriti dagli elementi di

(*) Presentata nella seduta del 10 novembre 1990.

tre sottogruppi propri. Un esempio di gruppo di tal tipo è dato dal gruppo quadrinomio (detto anche gruppo di Klein, o, in tedesco, Vierergruppe) costituito dall'unità e da tre elementi di periodo 2 (ciascuno dei quali, ovviamente, genera uno dei tre sottogruppi richiesti). Ebbene, Scorza dimostra che un gruppo G è «somma» (cioè unione insiemistica) di tre suoi sottogruppi propri se e solo se possiede un sottogruppo normale N tale che il gruppo quoziente G/N sia isomorfo al gruppo quadrinomio. La dimostrazione è estremamente elegante. Siano H_1, H_2, H_3, i tre sottogruppi di cui G è unione insiemistica. Dopo avere osservato che l'intersezione di due qualunque di questi sottogruppi è contenuta anche nel terzo, Scorza ripartisce gli elementi di G in quattro sottoinsiemi: $K = H_1 \cap H_2 \cap H_3$; $X_1 = H_1 \setminus K$, $X_2 = H_2 \setminus K$, $X_3 = H_3 \setminus K$. Dimostra poi che il prodotto di due elementi di X_i $(i = 1,2,3)$ è in K, e che il prodotto di due elementi appartenenti a due distinti tra gli insiemi X_1, X_2, X_3 appartiene al terzo. Sia $\Gamma = \{K, X_1, X_2, X_3\}$. Se si pone $X_1^2 = X_2^2 = X_3^2 = K$, $X_1X_2 = X_2X_1 = X_3$, $X_1X_3 = X_3X_1 = X_2$, $X_2X_3 = X_3X_2 = X_1$, $X_iK = X_i$ $(i = 1,2,3)$, $K^2 = K$, Γ risulta essere un gruppo quadrinomio e l'applicazione di G su Γ che porta ogni elemento di G in quello, tra gli insiemi K, X_1, X_2, X_3, che lo contiene, è un omomorfismo di nucleo K, onde G/K è isomorfo al gruppo quadrinomio.

L'interesse di questo lavoro sta principalmente nel fatto che in esso si pone per la prima volta un problema di ricoprimento (*covering*) di un gruppo, cioè di considerare un gruppo come unione insiemistica di particolari suoi sottogruppi propri. Anche recentemente, in una recensione di un lavoro dedicato al ricoprimento di un gruppo, apparsa sui *Mathematical Reviews*, era ricordato che lo studio del problema del ricoprimento era stato iniziato da Scorza.

Un altro suo lavoro [15] nasce da un teorema dimostrato dal Chapman nel 1913 [1]. Questi aveva provato che se G è un gruppo finito e H un suo sottogruppo di indice n, esiste un sistema di rappresentanti dei laterali sinistri di H il quale risulta anche sistema di rappresentanti dei laterali destri. Ma la dimostrazione di Chapman, fatta per assurdo, appariva poco naturale, e altrettanto può dirsi di quella riportata a pag. 83 del trattato di Miller-Blichfeldt-Dickson [8]. Ciascuna delle due dimostrazioni, afferma giustamente Scorza, «non pone affatto in evidenza la ragione intima di codesto notevole teorema».

Scorza considera un caso più generale, quello di due sottogruppi H, K (distinti o no) del gruppo G di eguale indice r, e dimostra che si possono sempre trovare r elementi $g_1, g_2, \ldots, g_r$ di G che costituiscano nello stesso tempo un sistema di rappresentanti dei laterali destri di H e un sistema di rappresentanti dei laterali sinistri di K, cioè tali che $G = Hg_1 \cup Hg_2 \cup \ldots \cup Hg_r = g_1K \cap g_2K \cap \ldots \cap g_rK$. Nel caso $H = K$ e G finito si ricade nel teorema di Chapman. Per dimostrare questo risultato Scorza va al cuore del problema, e ricorre alla decomposizione di G in laterali doppi (o, seguendo la nomenclatura di Scorza, in sistemi bilaterali) di H e K, introdotta da Frobenius in [3], $G = (Ht_1K) \cup (Ht_2K) \cup \ldots \cup (Ht_sK)$. Come è noto, ogni elemento di G appartiene ad uno ed un solo laterale doppio, e ogni laterale destro di H, o sinistro di K, è contenuto in uno (e uno solo) dei laterali doppi. Scorza dimostra che se un laterale destro di H e uno sinistro di K sono contenuti nello stesso laterale doppio Ht_iK, la loro intersezione non è vuota, e la cardinalità di quest'ultima non dipende dai particolari laterali scelti entro Ht_iK. Basta quindi porre una corrispondenza biunivoca tra i laterali destri di H e quelli sinistri di K contenuti in Ht_iK, e scegliere come rappresentante comune dei due laterali corrispondenti un elemento qualunque della loro intersezione. Ripetendo una simile operazione per ogni laterale doppio, si determinano alla fine r elementi che costituiscono un sistema di rappresentanti sia dei laterali destri di H che di quelli sinistri di K. Nel caso finito Scorza indica anche il numero dei modi in cui si possono scegliere i rappresentanti.

3. Lavori sui sottogruppi fondamentali

Il matematico Michele Cipolla, professore nell'Università di Palermo (anch'egli Socio di questa Accademia), aveva costruito, a partire dal 1909, la teoria dei sottogruppi e sistemi fondamentali di un gruppo finito. Sia G un gruppo finito e Z il suo centro. Se chiamiamo *associati* due elementi di $G \setminus Z$ quando hanno lo stesso centralizzante, la relazione che lega ogni elemento di $G \setminus Z$ agli elementi ad esso associati è di equivalenza. Le classi di equivalenza rispetto a tale relazione sono i *sistemi fondamentali* di G. Quindi due elementi di $G \setminus Z$ appartengono allo stesso sistema fondamentale se e solo se hanno lo stesso centralizzante. Ad ogni sistema fondamentale è legato un *sottogruppo fondamentale*, il centralizzante comune degli elementi del sistema. Evidentemente i sistemi fondamentali di G costituiscono una partizione di $G \setminus Z$. Cipolla nei suoi lavori aveva stabilito le proprietà basilari sui sottogruppi e sistemi fondamentali di un gruppo. Scorza ha dedicato alla teoria dei sottogruppi fondamentali tre *Note* lincee [16], [17], [18]. Nella prima di queste egli dichiara che, durante la redazione di un trattato sulla teoria dei gruppi che egli andava preparando (e che in realtà fu pubblicato solo nel 1942, quando egli era già morto da tre anni), egli aveva approfondito i lavori di Cipolla e aveva notato che ad essi potevano essere apportati «alcuni utili complementi».

Cipolla aveva chiamato «tipo» di un gruppo finito non abeliano il numero dei suoi sistemi (e sottogruppi) fondamentali, diminuito di due unità. Poiché il numero dei sistemi fondamentali di un gruppo finito non abeliano è sempre ≥ 3, il tipo è sempre un numero intero ≥ 1. In [16] Scorza considera un gruppo finito non abeliano H e un suo sottogruppo fondamentale G. Se τ' è il tipo di G, λ il numero dei sistemi fondamentali di H contenuti in G e λ' il numero dei sottogruppi fondamentali di H contenenti G, Scorza prova che $\tau' \leq \lambda - \lambda' - 2$, e approfondisce poi il caso in cui in detta formula valga il segno $=$. Nella stessa *Nota* vengono dimostrate altre formule significative atte a limitare superiormente τ'.

Nella *Nota* [17], che è il seguito di [16] e ne continua la numerazione dei paragrafi, si determinano disuguaglianze che leghino direttamente il tipo τ di un gruppo finito non abeliano H col numero, λ, dei sottogruppi fondamentali di H contenuti in un dato sottogruppo fondamentale G. Cipolla aveva dimostrato che $\tau \geq \lambda$. Scorza prova che, se $\tau > 1$, è $\tau \geq \lambda + 1$, e che, se $\tau > 2$, è $\tau \geq \lambda + 2$. In [17] vi sono altre interessanti disuguaglianze su cui non ci soffermiamo, per concentrare l'attenzione su quelle che legano il tipo di un gruppo al cosidetto «rango» delle stesso. Si dice che il gruppo finito non abeliano G è di rango r se esiste una catena di r sottogruppi fondamentali $G_r, G_{r-1}, \ldots, G_1$ tali che $G_r > G_{r-1} > \ldots > G_1$, ma non esiste una catena di $r+1$ sottogruppi fondamentali godente di analoga proprietà. Si comprende che, al crescere del rango G, cresca necessariamente anche il suo tipo, ma era interessante vedere con quale rapidità cresca. Già Cipolla aveva dimostrato che, detto r il rango e τ il tipo del gruppo finito non abeliano G, è $r \leqslant (\tau+2)/3$. Scorza, in [17] prova che $r \leqslant (\tau+5)/6$ mentre in [18] migliora ulteriormente questa diseguaglianza dimostrando che $r \leqslant (\tau+7)/7$.

4. La rappresentazione dei gruppi e le algebre di gruppo

Gaetano Scorza era stato portato allo studio della Teoria delle Algebre dalle sue fondamentali ricerche sulle funzioni abeliane e le matrici di Riemann, e, nel 1921, pubblicò il suo bellissimo trattato: *Corpi numerici ed algebre* [11]. In particolare la sua attenzione fu richiamata dalle cosiddette «algebre di gruppo». Sia G un gruppo finito d'ordine n e siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i suoi elementi. Sia poi F un campo. Si considerino le espressioni della forma $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$. Esse formano ovviamente uno spazio vettoriale di dimensione n su F. Estendendo poi per linearità a tali espressioni il prodotto definito in G, si viene a costruire un'algebra di dimensione n su F, detta appunto *algebra del gruppo G su F.*

Sono note le connessioni tra l'algebra del gruppo finito G sul campo F e le rappresentazioni di G come gruppo di sostituzioni lineari su F; ed oggi la determinazione delle rappresentazioni irriducibili di G, nel caso cosiddetto «ordinario» cioè quando la caratteristica di F non è un divisore dell'ordine di G, viene effettuata attraverso la decomposizione dell'algebra di G su F (la quale in tale ipotesi risulta semisemplice) nella somma diretta di algebre semplici. Ma i costruttori della teoria delle rappresentazioni (Frobenius, Burnside, Schur) avevano seguito prevalentemente altre vie. Soltanto in seguito alla comparsa della celebre *Memoria* [9] di Emmy Noether, del 1929, l'uso dell'algebra del gruppo nella teoria delle rappresentazioni prese il sopravvento. Ma Scorza si era già reso conto dell'opportunità di seguire la via poi imboccata sistematicamente dalla Noether. Un primo lavoro di Scorza [12] riguarda il caso in cui F è il campo complesso. Egli aveva indirizzato un suo allievo, Giuseppe Fichera, a studiare le relazioni tra l'algebra di un gruppo G sul campo complesso e le rappresentazioni di G. In una *Memoria* del 1922 Fichera aveva dimostrato tra l'altro che se Γ è una rappresentazione irriducibile di G di grado p sul campo complesso $\mathbf{C}$ e A è l'algebra di G su $\mathbf{C}$, tra le «sottoalgebre invarianti regolari» (cioè tra gli ideali bilaterali di A che sono isomorfi ad algebre complete di matrici), ve ne è una, Z, legata, in un certo modo, a Γ. In [12] Scorza costruisce effettivamente la Z a partire dagli elementi di G e dalle matrici appartenenti a Γ. Egli fa presente come ciò potrebbe farsi in modo rapido anche a partire da risultati di Schur [10] e di Speiser [21], ma preferisce invece trovare direttamente Z e di lì poi ricavare i teoremi di questi due autori (cioè operare nell'algebra e di lì ottenere risultati sulle rappresentazioni e non viceversa).

Un'altra *Nota* di Scorza [14] riguarda il caso in cui F è il campo reale. In un lavoro del 1906 [4], Frobenius e Schur avevano determinato le rappresentazioni irriducibili di un gruppo finito G come gruppo di sostituzioni lineari a coefficienti reali. Scorza osserva che dai risultati di questi autori si potrebbe dedurre la decomposizione dell'algebra di G sul campo reale come somma diretta di algebre irridicibili. Ma, anche in questo caso, egli segue la via opposta, e cioè ricava direttamente la decomposizione dell'algebra; da tale decomposizione, egli osserva, si possono poi ricavare i risultati di Frobenius e Schur sulle rappresentazioni irriducibili.

Prima del lavoro di Frobenius e Schur, l'attenzione degli studiosi della teoria delle rappresentazioni si era polarizzata sul caso in cui F è il campo complesso: ed è noto come gran parte di tali risultati si estendono facilmente al caso in cui F è un campo algebricamente chiuso la cui caratteristica non divida l'ordine del gruppo. Le cose però si complicano quando F non è algebricamente chiuso, e quindi anche quando F è reale. Se t è il numero delle classi di coniugio di G e F è il campo complesso, l'algebra di G è somma diretta di t algebre regolari. Nel caso in cui F è il campo reale, invece, bisogna distinguere tra le classi di coniugio bilaterali, cioè coincidenti con le classi degli inversi dei propri elementi, e quelle che non lo sono; queste ultime sono necessariamente in numero pari. Scorza dimostra il seguente teorema: se G consta di t classi di coniugio, di cui l sono bilatere e $2m$ non lo sono, l'algebra di G sul campo reale è somma diretta di $l+m$ algebre semplici dotate di elemento unità.

La dimostrazione si basa sull'immersione di A nell'algebra $\overline{A}$ di G sul campo complesso e dal confronto tra due basi di $\overline{A}$: quella dedotta dalla base data di A e quella legata alle classi di coniugio di G.

Tutti i lavori di Scorza esaminati sin qui risalgono al periodo 1925-1928. Nel 1937 apparve un altro lavoro [19], concernente le algebre di gruppo; esso costituisce anche l'ultima pubblicazione scientifica di Gaetano Scorza, se si prescinde dal trattato sui «Gruppi astratti» uscito postumo nel 1942. In tale lavoro si dà una nuova dimostrazione, particolarmente semplice ed elegante, del seguente teorema: un'algebra A del gruppo G d'ordine n sul campo Γ è semisemplice se e solo se la caratteristica di Γ è 0 o un primo che non divide n. Ricordiamo che un'algebra si dice «semisemplice» se non possiede sottoalgebre invarianti proprie pseudonulle, cioè ideali propri nilpotenti.

La dimostrazione di Scorza procede nel modo seguente. Se $x=\xi_1 u_1+\xi_2 u_2+\ldots+\xi_n u_n$ è un elemento di A ($u_1,\ldots,u_n$ essendo gli elementi di G, e u_1 l'elemento unità di G stesso), la traccia di x nella rappresentazione regolare sinistra o destra di G estesa ad A vale $n\xi_1$. Posto $v=u_1+\ldots+u_n$ si ha $u_i v=vu_i=v$ per $i=1,\ldots,n$, onde $v^2=v\sum u_i=nv$, e vA è generata dagli elementi hv con $h\in\Gamma$. Ne segue che, se la caratteristica di Γ divide n, è $v^2=0$ e $(vA)^2=0$. Pertanto vA è un'ideale nilpotente, e A non è semisemplice. Viceversa, supponiamo che la caratteristica di A sia 0 o un primo che non divida n, e sia $a=\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_n u_n$ un elemento fisso non nullo di A. Supponiamo di avere ordinato gli elementi $u_1,\ldots,u_n$ in modo che $u_2,\ldots,u_i$ siano tutti e soli gli elementi di periodo 2, e che le coppie (u_{i+1},u_{i+2}), $(u_{i+3},u_{i+4}),\ldots,(u_{n-1},u_n)$ siano costituite ciascuna da elementi tra loro inversi. Se $x=\xi_1 u_1+\ldots+\xi_n u_n$ è un elemento qualunque di A, la traccia di ax risulta uguale a $n\sigma$ con $\sigma=\alpha_1\xi_1+\ldots+\alpha_i\xi_i+\alpha_{i+1}\xi_{i+2}+\alpha_{i+2}\xi_{i+1}+\ldots+$

$+ \alpha_{n-1} \xi_n + \alpha_n \xi_{n-1}$. Da ciò segue che l'ideale destro aA generato da a non è nilpotente, altrimenti ogni elemento di aA dovrebbe avere traccia 0, ciò sarebbe $n\sigma = 0$ per ogni x, e di conseguenza, vista l'ipotesi sulla caratteristica di Γ, sarebbe $\sigma = 0$ per ogni x, il che è assurdo, essendo $\alpha_1, \ldots, a_n$ non tutti nulli. Segue che A non ha ideali propri nilpotenti, quindi è semisemplice.

Questa dimostrazione, afferma Scorza nella *Nota*, «per quanto mi consta, non è stata ancora rilevata». Il trattato di Huppert sui gruppi finiti [5] del 1967 la riporta con minime variazioni.

Scorza aveva intuito l'importanza dello studio delle rappresentazioni di un gruppo e delle algebre di gruppo anche nel caso oggi detto «modulare» cioè quando la caratteristica del campo è un divisore dell'ordine del gruppo. Egli indirizzò su questa strada un altro suo allievo, Lucio Lombardo-Radice, che discusse con lui la tesi di laurea su tale argomento, e pubblicò, negli anni 1938 e 1939, due *Note* [6, 7] in cui sono contenuti alcuni interessanti risultati. La ricerca non poté essere proseguita a causa della morte di Scorza e della prigionia di Lombardo-Radice per attività antifascista. La costruzione della teoria dei caratteri modulari sarà in seguito sviluppata, con altra ampiezza di orizzonti, dal grande matematico americano Richard Brauer.

5. Il volume «Gruppi astratti». Considerazioni conclusive sull'opera di Gaetano Scorza nel campo della teoria dei gruppi

Come abbiamo detto, Scorza lasciò incompiuto, al momento della sua morte, un trattato sui gruppi astratti [20]. Esso è stato pubblicato nel 1942 a cura del figlio Giuseppe e di me stesso. Noi abbiamo cercato di completare l'opera con l'aggiunta di alcuni paragrafi, ma può darsi che nella mente dell'autore esso dovesse contenere anche altri argomenti. Si tratta di un'opera pregevole. Esso è il secondo trattato sui gruppi, dopo quello di H. Zassenhaus [22] che non sia limitato ai gruppi finiti. Alcuni argomenti compaiono ivi per la prima volta in un trattato: la teoria di Baer sulla norma (o nucleo) di un gruppo (insieme degli elementi permutabili con ogni sottogruppo del gruppo), la teoria dei sottogruppi fondamentali di Cipolla (esposta precedentemente solo in un corso litografato dello stesso Cipolla); la dimostrazione del teorema di P. Hall sui gruppi risolubili, nella forma originale (nel trattato di Zassenhaus esso è dedotto dal teorema di Schur-Zassenhaus). Il volume si impone poi per le sue doti di eleganza e di chiarezza, che del resto caratterizzano tutta l'opera scientifica di Gaetano Scorza.

Da quanto abbiamo visto, emerge la notevole personalità di Gaetano Scorza anche attraverso la sua attività in un campo di studio che non era quello principale delle sue ricerche. Egli fu uno dei pochissimi matematici italiani che nel periodo tra le due guerre, dominato nel nostro paese dalle ricerche in Analisi e in Geometria, mantennero vivo l'interesse per l'Algebra. Si deve in gran parte alla sua influenza se dopo il 1945 c'è stata anche in Italia una più viva attenzione verso i problemi algebrici.

Ricerca parzialmente finanziata coi contributi del MURST.

Bibliografia

[1] H. W. Chapman, *A note on the elementary theory of groups of finite order.* Messenger of Mathematics, vol. 42, 1913, 132-136.

[2] G. Fichera, *I caratteri di un gruppo e le sue rappresentazioni sopra un gruppo di sostituzioni lineari.* Atti Acc. Gioenia di Catania, s. 5, vol. 13, 1922.

[3] G. Frobenius, *Ueber die Congruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul.* J. reine angew. Math., vol. 101, 1887, 273-299.

[4] G. Frobenius - I. Schur, *Ueber die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen.* Sitzungsberichte der Königlich Akad. der Wissenschaften, 1906, 186-208.

[5] B. Huppert, *Endliche Gruppen, I.* Berlin 1967.

[6] L. Lombardo Radice, *Intorno alle algebre legate ai gruppi d'ordine finito, I.* Rend. Sem. Mat. Roma, s. 4, vol. 2, 1938, 312-321.

[7] L. Lombardo Radice, *Intorno alle algebre legate ai gruppi d'ordine finito, II.* Rend. Sem. Mat. Roma, s. 4, vol. 3, 1939, 239-256.

[8] G. A. Miller - H. F. Blichfeldt - L. E. Dickson, *Theory and applications of finite groups.* New York 1916.

[9] E. Noether, *Hyperkomplexe Grossen und Darstellungstheorie.* Math. Zeitschrift, vol. 30, 1929, 641-692.

[10] I. Schur, *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere.* Sitzungsberichte der Königlich Akad. der Wissenschaften, 1906, 186-208.

[11] G. Scorza, *Corpi numerici ed algebre.* Messina 1921.

[12] G. Scorza, *Sulle algebre complesse legate ai gruppi di ordine finito.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 6, vol. 1, 1925, 652-658.

[13] G. Scorza, *I gruppi che possono pensarsi come somma di tre loro sottogruppi.* Boll. Un. Mat. It., vol. 5, 1926, 216-218.

[14] G. Scorza, *Sulle algebre reali legate ai gruppi di ordine finito.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 6, vol. 4, 1926, 485-491.

[15] G. Scorza, *A proposito di un teorema del Chapman.* Boll. Un. Mat. It., vol. 6, 1927, 1-6.

[16] G. Scorza, *Sui sottogruppi fondamentali di un gruppo, I.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 6, vol. 6, 1927, 361-365.

[17] G. Scorza, *Sui sottogruppi fondamentali di un gruppo, II.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 6, vol. 6, 1927, 441-445.

[18] G. Scorza, *Maggiore determinazione della relazione tra il rango e il tipo di un gruppo.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 6, vol. 7, 1928, 173-178.

[19] G. Scorza, *Sulle algebre legate ai gruppi d'ordine finito.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 6, vol. 25, 1937, 683-685.

[20] G. Scorza, *Gruppi astratti.* Roma 1942.

[21] A. Speiser, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung.* Berlin 1922.

[22] H. Zassenhaus, *Lehrbuch der Gruppentheorie, I.* Leipzig 1937.

Dipartimento di Matematica «U. Dini»
Università degli Studi di Firenze
Viale Morgagni, 67 A - 50134 Firenze