Matematica. — *Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni.* Nota del dott. G. Frattini, presentata dal Socio Battaglini.

« Dato un gruppo G di sostituzioni e in generale di operazioni in numero finito, diremo, come è naturale, che un sistema (g) di sostituzioni di G è un sistema di sostituzioni generatrici fra loro indipendenti, allorchè ogni sostituzione di G o sia in (g) o si possa ottenere come prodotto di sostituzioni contenute in (g), e qualsivoglia sostituzione di (g) non si possa ottenere come prodotto di sostituzioni scelte fra le rimanenti del sistema. Mancando questa seconda condizione diremo che il sistema è semplicemente un sistema di generatrici. Immaginando ora di avere formato e di avere sott'occhio tutti i possibili sistemi $(g)'$, $(g)''$.... di generatrici fra loro indipendenti, dovrà qualche sostituzione di G (almeno l'unità) mancare in tutti i sistemi.

« Se il gruppo G fosse ad es. quello delle potenze della sostituzione: $S=(a, b, c, d)$, le potenze di grado pari di questa, non potrebbero far parte di alcun sistema di generatrici di G fra loro indipendenti, perchè, come facilmente si vede, alla generazione di G dovrebbe pur concorrere una potenza di grado dispari della S dalla quale quelle di grado pari sarebbero generate.

« E così: Le sostituzioni di un gruppo qualsivoglia si possono distinguere in due classi: nella classe cioè di quelle che possono efficacemente concorrere alla generazione del gruppo potendo esse far parte di un sistema generatore senza che siano generate dalle rimanenti del sistema, e nella classe di quelle le quali non possono efficacemente concorrere alla generazione sopra detta.

« Oggetto di questa Nota è quello di porre in rilievo che:

1. « Le sostituzioni del gruppo le quali non possono efficacemente concorrere alla sua generazione, ne costituiscono un sottogruppo eccezionale (il sottogruppo Φ).

2. « Il gruppo Φ coincide col gruppo di quelle sostituzioni le quali sono moduli rispetto ai sistemi generatori del gruppo fondamentale, sono cioè tali, che qualunque sistema generatore si trasformi in un nuovo sistema generatore quando le sostituzioni del primo sistema si considerino astrazion fatta da fattori uguali a quei moduli.

3. « Il gruppo Φ coincide ancora col gruppo comune ai sottogruppi massimi [1] del gruppo fondamentale.

4. « Affinchè il gruppo fondamentale possa essere generato da un certo suo sottogruppo combinato con taluno

[1] Massimo diremo un sottogruppo di G allorquando non esisterà in G altro sottogruppo che lo contenga.

degli altri, è necessario e sufficiente che il primo sottogruppo non sia esclusivamente formato con sostituzioni di Φ.

« E finalmente:

5. « Il gruppo Φ è un gruppo Ω_0 di Capelli [1].

« Che le sostituzioni g di G le quali non possono efficacemente concorrere alla generazione dell'istesso G costituiscano un gruppo, si può dimostrare nel seguente modo: Supponiamo che $g^{(\alpha)}$, $g^{(\beta)}$ non possano far parte di alcun sistema di generatrici fra loro indipendenti. Neppure potrà farne parte il prodotto $g^{(\alpha)}.\, g^{(\beta)}$. Chè, se fosse altrimenti, surrogando nel sistema $(g)^{(\omega)}$ di generatrici fra loro indipendenti il prodotto $g^{(\alpha)}.\, g^{(\beta)}$ con i suoi fattori, si avrebbe ancora nel sistema così modificato un nuovo sistema generatore. E riducendo comunque questo nuovo sistema a tale che fosse composto di sole generatrici fra loro indipendenti col sopprimere talune sostituzioni superflue, le sostituzioni $g^{(\alpha)}$, $g^{(\beta)}$ dovrebbero sparire necessariamente. Ma si perverrebbe così ad un sistema generatore composto di sostituzioni contenute in $(g)^{(\omega)}$, e privo del prodotto $g^{(\alpha)}.\, g^{(\beta)}$ il quale per ciò sarebbe superfluo in $(g)^{(\omega)}$.

« Trasformando ora le sostituzioni di un sistema (g) con qualsivoglia sostituzione $g^{(\mu)}$ di G, si otterrà certamente un nuovo sistema (g). Infatti se le sostituzioni del primo sistema generano G, le sostituzioni del sistema trasformato genereranno il gruppo G trasformato mediante $g^{(\mu)}$ ossia G medesimo. E nessuna delle trasformate sarà superflua nel secondo dei due sistemi. Infatti, se ciò fosse, superflua sarebbe altresì la sostituzione corrispondente nel primo dei due sistemi nel quale il secondo si trasforma mediante la inversa di $g^{(\mu)}$. Da ciò segue che se una g esiste in taluno o manca in tutti i sistemi (g), tutte le trasformate di g soggiaceranno alla identica condizione. Il gruppo delle sostituzioni le quali non possono efficacemente concorrere alla generazione di G conterrà adunque tutte le trasformate di qualsivoglia sua sostituzione con sostituzioni di G, e sarà per ciò eccezionale in G.

« Ed ora, sia K un sottogruppo di G non contenuto per intiero in Φ, e sia $(g)^{(\omega)}$ uno di quelli fra i sistemi (g) che presentano sostituzioni comuni

[1] Gruppi Ω_0 di Capelli dico quei gruppi i quali essendo di ordine: $p^\alpha . q^\beta . r^\gamma \dots$ non contengono che un solo gruppo degli ordini: p^α, q^β, r^γ, ... rispettivamente, avendo il Capelli nella sua Memoria: *Sopra la composizione dei gruppi di sostituzioni* (R. Accademia dei Lincei, vol. XIX) dimostrato varie proprietà relative a questi gruppi, e fra le altre le due seguenti: I fattori di composizione dei gruppi Ω_0 sono numeri primi: Ogni sottogruppo di un gruppo Ω_0 è anch'esso un gruppo Ω_0. Combinando questa seconda proprietà con la nostra proposizione 4ª, si concluderà facilmente che: Quando non sia possibile generare il gruppo fondamentale combinando un certo suo sottogruppo con taluno degli altri, il primo sottogruppo apparterrà alla specie dei gruppi Ω_0 di Capelli.

con K. Soppresse in $(g)^{(\omega)}$ le sostituzioni che esso ha comuni con K, le restanti genereranno un gruppo K′ minore di G, perchè se esse generassero l'intiero G, le sostituzioni soppresse sarebbero state superflue in $(g)^{(\omega)}$. Ciò posto, il gruppo K e il gruppo K′ genereranno evidentemente l'intiero G perchè G era generato dalle sostituzioni di $(g)^{(\omega)}$. Esiste adunque un gruppo K′ di G che con K genera G.

« Ma ciò non accadrebbe se K fosse per intero contenuto in Φ. Chè se il gruppo K con un gruppo K′ minore di G generasse quest'ultimo gruppo, qualche sostituzione di K potrebbe efficacemente concorrere alla generazione di G, e ciò è contrario alla natura delle sostituzioni di Φ le quali comporrebbero K.

« Esiste il seguente teorema: Un sottogruppo Γ eccezionale in G può sempre efficacemente concorrere alla generazione di G allorquando esistano in Γ almeno due gruppi distinti fra quelli che hanno per ordine la massima potenza di taluno dei fattori primi che compongono l'ordine di Γ.

« Prima di dimostrare questo teorema, avvertirò che esso è nella sua sostanza dovuto al Capelli il quale dimostra (1) che esistono nella sopra detta ipotesi sottogruppi di G i quali partecipano con le loro sostituzioni a tutti i periodi di Γ. Per dimostrare la coincidenza delle due proposizioni osserveremo infatti che, se Γ è eccezionale in G, ogni sottogruppo L di G è permutabile con Γ (2), così che riunendo insieme i periodi d Γ aventi sostituzioni comuni con i singoli periodi di L, avrà luogo una nuova distribuzione delle sostituzioni di G in periodi e precisamente la distribuzione relativa al gruppo generato da Γ e da L come nella mia Memoria: *Intorno ad alcune proposizioni della teoria delle sostituzioni* (3), ho dimostrato. E da ciò apparisce evidentemente che: condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano sottogruppi L di G che partecipino con le loro sostituzioni a tutti i periodi di Γ è, che Γ con qualche sottogruppo di G e minore di G generi G che cioè Γ concorra efficacemente alla generazione di G con qualche sistema di sostituzioni estranee a Γ.

« Ciò premesso, veniamo alla dimostrazione dell'enunciato teorema. Sia P uno dei sottogruppi d'ordine p^{α} (α massimo) contenuti in Γ, ed S una sostituzione di G. Dicasi P′ il gruppo d'ordine p^{α} (contenuto in Γ) nel quale S trasforma P.

« Sappiamo esistere in Γ sostituzioni le quali trasformano P in P′. Sia γ una di queste. La sostituzione $S\gamma^{-1}=\sigma$ apparterrà al gruppo delle sostituzioni di G le quali trasformano P in se medesimo, e si avrà: $S=\sigma\gamma$.

« Essendo la S una qualsivoglia sostituzione di G, si conclude che, il

(1) l. c.
(2) Ha luogo cioè, quali si sieno α e β, una relazione della forma: $l_\alpha \cdot \gamma_\beta = \gamma_\beta' \cdot l_\alpha'$.
(3) Mem. della R. Accademia dei Lincei, Vol. XVIII, 1883-84.

gruppo Γ e quello delle sostituzioni che trasformano P in se medesimo generano G. Ora il gruppo Γ concorre efficacemente a questa generazione purchè le sostituzioni di G le quali trasformano P in se medesimo non formino l'intiero G. Ma in questo caso P' coinciderebbe con P e non esisterebbero in Γ due gruppi distinti d'ordine p^{α}.

« Ed ora, poichè il gruppo Φ eccezionale in G non può, stante la sua definizione, efficacemente concorrere alla generazione di G, non esisteranno in Φ due gruppi distinti degli ordini p^{α}, q^{β}, ... rispettivamente. Il gruppo Φ sarà perciò un gruppo Ω_0.

« Il gruppo Φ è poi composto di quelle sostituzioni le quali sono moduli rispetto alla generazione di G. Sia infatti: $P\varphi_1\, Q\varphi_2\, R\varphi_3 \dots$ una sostituzione di un sistema generatore considerata come prodotto nel quale i fattori φ_1, φ_2, φ_3, ... indicano sostituzioni di Φ. Siccome è: $P\varphi_1 = \varphi'_1 P$, $PQ\varphi_2 = \varphi'_2 PQ$, ... per essere Φ eccezionale in G, avremo: $P\varphi_1\, Q\varphi_2\, R\varphi_3 \dots = (\varphi'_1 \varphi'_2 \varphi'_3 \dots)(PQR\dots) = \varphi PQR\dots$

« Avverrà così che, mentre sostituendo nel sistema generatore la φ e il prodotto PQR... in luogo della sostituzione considerata, si otterrà evidentemente un nuovo sistema generatore, sopprimendo la φ che è superflua, si riuscirà ad introdurre la PQR... in luogo della primitiva sostituzione, come precisamente sarebbe avvenuto facendo in quella: $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 \dots = 1$. Viceversa se la sostituzione $g^{(h)}$ è un modulo, essa esisterà in Φ necessariamente. Infatti la $g^{(h)}$ non potrebbe far parte di alcun sistema di generatrici fra loro indipendenti, chè altrimenti si potrebbe far quivi $g^{(h)} = 1$ e sopprimere la $g^{(h)}$ come superflua.

« Così, se il gruppo G fosse il gruppo ciclico delle potenze di una sostituzione S d'ordine m, le potenze: S^{p_1}, S^{p_2}... quando p_1, p_2... si intendano primi con m, rappresenteranno sistemi generatori del gruppo, anzi i soli sistemi di un'unica generatrice. Se adunque S^a apparterrà al gruppo Φ, le sostituzioni S^{a+p_1}, S^{a+p_2}, ... riprodurranno la soprascritta serie di potenze. La serie dei numeri primi con m e inferiori ad m rientrerà adunque in se stessa (mod. m) per l'aggiunta della a a tutti i suoi elementi. Viceversa, se ciò avvenga, S^a apparterrà al gruppo Φ. Infatti se S^u, ... S^a potesse essere un sistema di generatrici indipendenti, il prodotto $S^{u'u} \dots S^{a'a}$ per convenienti valori di u', ... a' si ridurrebbe alla S affetta da esponente $u'u + \dots + a'a$ primo con m, e primo con m sarebbe perciò $u'u + \dots$ Basterebbero adunque le S^u... a generare il gruppo.

« Ciò posto, sia: $m = p^{\alpha}.q^{\beta}.r^{\gamma}\dots$ La serie dei numeri primi con m ed inferiori ad m rientra evidentemente in se stessa per a multiplo del prodotto $p.q.r\dots$ e non rientra in se stessa se non in questo caso. Se infatti a non sarà divisibile per qualcuno dei fattori primi di m ad es. per p, la serie $\omega + a$, $\omega + 2a \dots$ nella quale ω rappresenti un numero primo con m, conterrà qualche termine divisibile per p per essere a primo con p, e perciò la serie dei numeri primi con m e inferiori ad m non rientrerà in se stessa per l'aggiunta di a a tutti i suoi elementi. Concludiamo da ciò che nel caso semplice che consideriamo il gruppo Φ è il gruppo costituito dalle potenze della sostituzione $S^{p \cdot q \cdot r \cdots}$. Sopra i sistemi generatori del gruppo ciclico si potrà adunque operare con l'eguaglianza ipotetica: $S^{p \cdot q \cdot r \cdots} = 1$.

« Sia finalmente H′ un sottogruppo massimo di G. Se Φ non esistesse in H′, il gruppo generato da H′ e da Φ coinciderebbe con G perchè H′ è massimo, e Φ potrebbe così concorrere alla generazione di G, la qual cosa è inammissibile. Ma se qualche sostituzione $g^{(\alpha)}$ estranea a Φ potesse esser comune a tutti i gruppi H, siccome $g^{(\alpha)}$ combinata con qualche sottogruppo K genererebbe G, essa lo genererebbe altresì combinata con un sottogruppo $H^{(i)}$ che, o sarebbe lo stesso K se K fosse massimo in G, o altrimenti conterrebbe K come sottogruppo. Ma ciò è impossibile perchè si è supposto che $H^{(i)}$ contenga $g^{(\alpha)}$. Noteremo pertanto il teorema: Il gruppo comune a tutti i sottogruppi massimi di qualsivoglia gruppo, è eccezionale nel gruppo ed è un gruppo Ω_0. Similmente si dimostra che il gruppo Φ è comune a tutti i sottogruppi eccezionali massimi di G. Ma esso può anch'essere un sottogruppo del gruppo totale a questi comune.

« Accenneremo finalmente che, siccome un gruppo Ω_0 di ordine $p^{\alpha} . q^{\beta} . r^{\gamma} \ldots$ contiene in sè sottogruppi di qualsivoglia ordine minore $p^{\alpha'} . q^{\beta'} r^{\gamma'} \ldots$, generati da sottogruppi degli ordini rispettivi $p^{\alpha'}, q^{\beta'}, r^{\gamma'}, \ldots$ le sostituzioni singole di ciascun gruppo generatore essendo permutabili con le singole di tutti gli altri, facile è dimostrare che, il sottogruppo Φ di un gruppo Ω_0 coincide con quello che è generato dai gruppi rispettivamente comuni a tutti i gruppi degli ordini $p^{\alpha-1}$, $q^{\beta-1} \ldots$ che in Ω_0 sono contenuti ».

Biologia. — *Del fuso direzionale e della formazione di un globulo polare nell' ovulo ovarico di alcuni mammiferi.* Nota del prof. G. Bellonci, presentata dal Socio Blaserna.

Processo di preparazione: Induramento dell'ovario nel liquido di Flemming (miscela concentrata); compenetrazione di paraffina; sezioni microtomiche appiccicate colla miscela di albumina e glicerina; colorazione colla saffranina di Pfitzner o colla fucsina acida.

« Negli ovuli ovarici maturi di topo casalingo e di cavia si forma un fuso direzionale, il quale è completamente simile al fuso direzionale di alcuni invertebrati. Esso deriva dalla vescicola germinativa, migrata al polo animale, ed è perpendicolare alla superficie del vitello. Gli ovuli in cui si forma il fuso sono contenuti in follicoli le cui cellule epiteliali presentano una particolare trasformazione: si sciolgono le une dalle altre, per diventare ameboidi; e si riempiono di granuli (goccioline ?) che fra le altre proprietà han quella (notata da Flemming) di colorarsi come la cromatina nucleare.