Università del Salento
Dipartimento di Matematica
"Ennio De Giorgi"

Francesco Catino

Francesco de Giovanni

Alcuni Aspetti dei Gruppi con Classi di Coniugio Finite

Quaderno 1/2010: ISBN xx-xxxx-xxx-x

Università del Salento - Coordinamento SIBA

Quaderni di Matematica

Una pubblicazione a cura del

Dipartimento di Matematica
"Ennio De Giorgi"
Università del Salento

I Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università del Salento documentano gli aspetti di rilievo dell'attività di ricerca e didattica del Dipartimento. Nei Quaderni sono pubblicati articoli di carattere matematico che siano:

(1) lavori di rassegna e monografie su argomenti di ricerca;
(2) testi di seminari di interesse generale, tenuti da docenti o ricercatori del Dipartimento o esterni;
(3) lavori di specifico interesse didattico.

La pubblicazione dei lavori è soggetta all'approvazione del Comitato di Redazione, che decide tenendo conto del parere di un *referee*, nominato di volta in volta sulla base delle competenze specifiche.

Quaderno 1/2010: ISBN xx-xxxx-xxx-x
Università del Salento - Coordinamento SIBA

Alcuni Aspetti dei Gruppi con Classi di Coniugio Finite

Francesco Catino - Francesco de Giovanni

Dipartimento di Matematica
Università del Salento
Lecce - Italia

Email: *francesco.catino@unisalento.it*

Dipartimento di Matematica e Applicazioni
Università di Napoli Federico II
Napoli - Italia

Email: *degiovan@unina.it*

Prefazione

Questi appunti nascono da corsi e cicli di seminari tenuti dagli autori nell'Università del Salento e nell'Università di Napoli Federico II e da numerose conversazioni tra gli autori stessi su una teoria - quella dei gruppi con classi di coniugio finite - che a distanza di settanta anni dalla sua nascita rimane vitale e ricca di problemi ancora da risolvere.
La trattazione non ha pretese di completezza, ma vuole fornire gli strumenti essenziali della teoria ed alcuni suoi recenti sviluppi, suggerendo possibili ulteriori ricerche.

Francesco Catino
Francesco de Giovanni

Indice

CAPITOLO 1

Aspetti generali

1. Generalità sugli FC-gruppi

Sia G un gruppo. Un elemento x di G si dice un *FC-elemento* se ha un numero finito di coniugati in G. Poichè la classe di coniugio di x in G è equipotente all'insieme dei laterali destri in G del centralizzante $C_G(x)$ di x, si ha subito che x è un FC-elemento se e soltanto se l'indice $|G : C_G(x)|$ è finito; in questo caso, poichè il centralizzante di $\langle x\rangle^G$ è il nocciolo di $C_G(x)$, risulta che anche il gruppo quoziente $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ è finito. L'insieme costituito dagli FC-elementi del gruppo G viene chiamato *FC-centro* di G.

Lemma 1.1. *Qualunque sia il gruppo G, l'FC-centro di G è un sottogruppo caratteristico.*

Dimostrazione – Ovviamente l'FC-centro F di G non è vuoto, in quanto contiene almeno l'elemento neutro di G. Siano x e y due qualunque elementi di F, sicchè gli indici $|G : C_G(X)|$ e $|G : C_G(y)|$ sono entrambi finiti. Allora anche l'intersezione $C_G(x) \cap C_G(y)$ ha indice finito in G; d'altra parte $C_G(x) \cap C_G(y)$ è contenuto nel centralizzante $C_G(xy^{-1})$, per cui l'indice $|G : C_G(xy^{-1})|$ è finito, e xy^{-1} appartiene ad F. Pertanto F è un sottogruppo di G, che risulta ovviamente caratteristico, in quanto banalmente ogni automorfismo di G trasforma FC-elementi in FC-elementi. $\square$

Si ricordi che se G è un qualunque gruppo, il *residuale finito* di G è l'intersezione di tutti i sottogruppi di indice finito di G; poichè ogni sottogruppo di indice finito di un gruppo ne contiene uno normale di indice finito, si ha che il residuale finito di un gruppo G coincide con l'intersezione dei sottogruppi normali di indice finito di G. Il gruppo G si dice *residualmente finito* se il suo residuale finito è identico. Pertanto ogni gruppo residualmente finito si può immergere nel prodotto cartesiano di una famiglia di gruppi finiti.

Lemma 1.2. *Sia G un gruppo, e sia F l'FC-centro di G. Allora il gruppo quoziente $G/C_G(F)$ è residualmente finito.*

Dimostrazione − Qualunque sia l'elemento x di F, l'indice $|G : C_G(x)|$ è finito. Poichè si ha ovviamente

$$C_G(F) = \bigcap_{x \in F} C_G(x),$$

il gruppo $G/C_G(F)$ è residualmente finito. □

Qualunque sia il gruppo G, risulta chiaro che il centro $Z(G)$ di G è contenuto nell'FC-centro di G, ma si ha subito che l'FC-centro di G contiene anche ogni sottogruppo normale finito ed ogni eventuale sottogruppo abeliano di indice finito di G. Pertanto anche in un gruppo a centro identico l'FC-centro può essere molto ampio; ad esempio, l'FC-centro del gruppo diedrale infinito D_∞ coincide ovviamente con l'unico sottogruppo di indice 2.

Un gruppo G si dice un *FC-gruppo* se coincide con il suo FC-centro, cioè se ogni elemento di G ha soltanto un numero finito di coniugati. Si osservi che un gruppo G è un FC-gruppo se e soltanto se il gruppo quoziente $G/C_G(\langle x \rangle^G)$ è finito per ogni elemento x di G. Evidentemente, i gruppi abeliani ed i gruppi finiti sono FC-gruppi, e la teoria degli FC-gruppi si è sviluppata nel tentativo di cercare proprietà comuni a tali classi di gruppi. Ulteriori esempi di FC-gruppi sono forniti dai gruppi il cui centro ha indice finito. Gli FC-gruppi sono stati introdotti da R. Baer, e quindi studiati da numerosi autori tra cui si segnalano, per i loro importanti contributi alla teoria, Y.M. Gorčakov, P. Hall, B.H. Neumann e più recentemente L.A. Kurdachenko e M.J. Tomkinson.

Evidentemente, sottogruppi e quozienti di FC-gruppi sono a loro volta FC-gruppi, ma la classe degli FC-gruppi non è chiusa rispetto alle estensioni, come prova ancora la considerazione del gruppo diedrale infinito. Inoltre, il prodotto diretto di una qualunque famiglia di gruppi finiti è un FC-gruppo, sicchè in particolare i gruppi con il centro di indice finito non esauriscono la classe degli FC-gruppi. D'altra parte per i gruppi finitamente generati si ha il seguente facile risultato.

Teorema 1.3. (B.H. Neumann [**84**]) *Sia G un FC-gruppo finitamente generato. Allora il centro $Z(G)$ ha indice finito in G.*

Dimostrazione − Sia $\{x_1, \dots, x_t\}$ un sistema finito di generatori di G. Poichè G è un FC-gruppo, l'indice $|G : C_G(x_i)|$ è finito per ogni $i = 1, \dots, t$; d'altra parte si ha ovviamente

$$Z(G) = \bigcap_{i=1}^{t} C_G(x_i),$$

e quindi anche $Z(G)$ ha indice finito in G. $\square$

E' anche il caso di osservare che se un FC-gruppo G contiene un sottogruppo abeliano A di indice finito, allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito. Infatti, se $\{x_1, \ldots, x_t\}$ è un trasversale destro di A in G, l'intersezione

$$A \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{t} C_G(x_i) \Big)$$

è un sottogruppo di $Z(G)$ ed ha ovviamente indice finito in G.

Sia G un gruppo. Qualunque siano gli elementi x e g di G, risulta $g^{-1}xg = x[x,g]$ e quindi la classe di coniugio di x in G è contenuta nel laterale xG'. In particolare tutti i gruppi con il derivato finito sono FC-gruppi.

Di fondamentale importanza nella teoria degli FC-gruppi è il seguente risultato, noto come "lemma di Dietzmann".

Teorema 1.4. (A.P. Dietzmann [**36**]) *Sia G un gruppo, e siano $x_1, \ldots, x_t$ FC-elementi periodici di G. Allora la chiusura normale $\langle x_1, \ldots, x_t\rangle^G$ è un sottogruppo finito di G.*

Dimostrazione – Poichè ciascuno degli elementi $x_1 \ldots, x_t$ ha un numero finito di coniugati, si può supporre senza ledere la generalità che l'insieme $\{x_1, \ldots, x_t\}$ contenga tutti i coniugati di ogni suo elemento, sicchè

$$E = \langle x_1, \ldots, x_t\rangle^G = \langle x_1, \ldots, x_t\rangle.$$

Sia a un qualunque elemento non identico di E, per cui $a = x_{i_i}^{k_1} \ldots x_{i_n}^{k_n}$, dove $i_1, \ldots, i_n$ appartengono a $\{1, \ldots, t\}$ e $k_1, \ldots, k_n$ sono opportuni numeri interi non negativi. Tra tutte le espressioni di questo tipo per a se ne scelga una $x_{j_1}^{h_1} \ldots x_{j_m}^{h_m}$ di lunghezza minima m. Si ponga $y_r = x_{j_r}^{h_r}$ per ogni $r = 1, \ldots, m$, e si assuma $j_s = j_t$ per qualche $s < t \leq m$. Allora si ha

$$a = y_1 \ldots y_{s-1}(y_s y_t) y_{s+1}^{y_t} \cdots y_{t-1}^{y_t} y_{t+1} \cdots y_m,$$

e questa espressione ha lunghezza minore di m, una contraddizione, che assicura che gli indici $j_1, \ldots, j_m$ sono a due a due distinti; quindi il numero delle possibilità per l'oggetto a è al più

$$t! \prod_{i=1}^{t} o(x_i),$$

dove $o(x_i)$ denota il periodo dell'elemento x_i. Pertanto il sottogruppo E è finito. $\square$

Dal lemma di Dietzmann segue che gli FC-gruppi periodici coincidono con i gruppi che possono essere ricoperti da una famiglia di sottogruppi normali finiti.

Corollario 1.5. *Un gruppo periodico G è un FC-gruppo se e soltanto se ogni sua parte finita è contenuta in un sottogruppo normale finito.*

Dimostrazione − La necessarietà della condizione segue subito dal lemma di Dietzmann. D'altra parte, si è già osservato che un qualunque sottogruppo normale finito di un gruppo è contenuto nell'FC-centro, per cui ogni gruppo che sia unione di una famiglia di sottogruppi normali finiti è un FC-gruppo periodico. □

Se G è un FC-gruppo, dal Lemma 1.2 segue subito che il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è residualmente finito; come conseguenza si può osservare che un FC-gruppo semplice è necessariamente finito, sicchè in particolare i fattori di composizione di un qualunque FC-gruppo sono finiti. Un'ulteriore informazione sulla struttura del gruppo quoziente di un FC-gruppo rispetto al suo centro è fornita dal seguente risultato (si ricordi che un gruppo si dice *localmente finito* se ogni sua parte finita genera un sottogruppo finito).

Teorema 1.6. (R. Baer [**5**]) *Sia G un FC-gruppo. Allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è localmente finito.*

Dimostrazione − Sia x un qualunque elemento di G, e sia $\{y_1, \dots, y_t\}$ un trasversale destro di $C_G(x)$ in G. Poichè G è un FC-gruppo, l'intersezione

$$C = \bigcap_{i=1}^{t} C_G(y_i)$$

è un sottogruppo di indice finito di G, per cui esiste un numero intero positivo k tale che x^k appartenga a C. D'altra parte, qualunque sia l'elemento g di G, esiste $i \leq t$ tale che $g = zy_i$ con $z \in C_G(x)$; allora $gx^k = x^k g$ e perciò x^k appartiene a $Z(G)$. Pertanto il gruppo $G/Z(G)$ è periodico, e quindi anche localmente finito per il Corollario 1.5. □

Gli ultimi risultati di questo paragrafo descrivono il comportamento degli FC-gruppi che siano localmente risolubili oppure localmente nilpotenti.

Sia G un gruppo. Il sottogruppo generato da tutti i sottogruppi normali minimali di G si chiama *zoccolo* di G, e si denota col simbolo $Soc(G)$. La *serie degli zoccoli* di G si può allora definire per induzione transfinita come la serie normale ascendente

$$S_0(G) \leq S_1(G) \leq \ldots \leq S_\alpha(G) \leq S_{\alpha+1}(G) \leq \ldots$$

ottenuta ponendo $S_0(G) = \{1\}$,

$$S_{\alpha+1}(G)/S_\alpha(G) = Soc(G/S_\alpha(G))$$

per ogni ordinale α e

$$S_\lambda(G) = \bigcup_{\alpha<\lambda} S_\alpha(G)$$

se λ è un ordinale limite.

LEMMA 1.7. *Sia G un FC-gruppo periodico. Allora risulta $G = S_\omega(G)$.*

DIMOSTRAZIONE – Sia N un qualunque sottogruppo normale finito di G. Se t è la lunghezza massima di una serie di N costituita da sottogruppi normali di G, si ha ovviamente che ogni fattore di tale serie è un fattore principale di G, per cui N è contenuto in $S_t(G)$. Poichè G è unione dei suoi sottogruppi normali finiti, risulta allora $G = S_\omega(G)$. □

Si ricordi che un gruppo G si dice *iperabeliano* se è dotato di una serie normale ascendente a fattori abeliani contenente i sottogruppi banali, o equivalentemente se ogni quoziente non identico di G contiene un sottogruppo normale abeliano non identico. Se G è un qualunque gruppo, l'*ipercentro* di G è l'ultimo termine della sua serie centrale superiore; il gruppo G si dice *ipercentrale* se coincide con il suo ipercentro, o equivalentemente se ogni quoziente non identico di G ha centro non identico.

TEOREMA 1.8. *Sia G un FC-gruppo localmente risolubile. Allora G è iperabeliano, ed è dotato di una serie normale ascendente a fattori abeliani di lunghezza al più ω.*

DIMOSTRAZIONE – Qualunque sia il numero intero positivo n, si denoti con $G_{n+1}/Z(G)$ l'n-simo termine della serie degli zoccoli di $G/Z(G)$, ponendo inoltre $G_0 = \{1\}$ e $G_1 = Z(G)$. Poichè G è localmente risolubile, ciascuno dei gruppi G_{n+1}/G_n è abeliano; d'altra parte, poichè il gruppo $G/Z(G)$ è periodico, il Lemma 1.7 assicura che risulta

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n.$$

Pertanto G ha una serie normale ascendente di lunghezza al più ω i cui fattori sono abeliani, ed in particolare G è iperabeliano. □

Poichè i fattori principali dei gruppi localmente nilpotenti sono centrali, un ragionamento analogo a quello svolto nella dimostrazione del teorema precedente consente di provare il seguente risultato.

Teorema 1.9. *Sia G un FC-gruppo localmente nilpotente. Allora G è ipercentrale, e la sua serie centrale superiore ha lunghezza al più ω.*

2. Il teorema di Schur

Si è già osservato che la classe dei gruppi con il centro di indice finito e quella dei gruppi con il derivato finito sono sottoclassi naturali e non banali della classe degli FC-gruppi. Un famoso e fondamentale risultato ottenuto da I. Schur nel 1902 prova che queste classi gruppali sono confrontabili. La dimostrazione qui riportata del teorema di Schur è dovuta a Tomkinson, e utilizza il seguente importante risultato riguardante i gruppi finiti, noto come "teorema di Schur - Zassenhaus", per la cui dimostrazione si rinvia ad uno qualunque dei vari ottimi manuali di teoria dei gruppi esistenti. E' il caso di osservare che la forma attuale del teorema di Schur - Zassenhaus dipende dal famoso risultato di W. Feit e J.G. Thompson sulla risolubilità dei gruppi finiti di ordine dispari.

Lemma 1.10. *Sia G un gruppo finito, e sia N un sottogruppo normale di G tale che gli ordini di N e di G/N siano coprimi. Allora esiste un complemento di N in G, cioè un sottogruppo K di G tale che $G = KN$ e $K \cap N = \{1\}$. Inoltre due qualunque complementi di N in G sono coniugati.*

Teorema 1.11. (I. Schur [**107**]) *Sia G un gruppo tale che il gruppo quoziente $G/Z(G)$ sia finito. Allora anche il derivato G' di G è finito.*

Dimostrazione − Sia X un sottogruppo finitamente generato di G tale che $G = XZ(G)$; allora $G' = X'$ e quindi, sostituendo G con X, si può supporre senza ledere la generalità che il gruppo G sia finitamente generato. Ne segue che anche il centro $Z(G)$ è finitamente generato, per cui $Z(G) = A \times E$ con A abeliano senza torsione finitamente generato ed E finito; in particolare G/A è finito. Sia p un numero primo maggiore dell'ordine di G/A. Qualunque sia il numero intero positivo n, il teorema di Schur - Zassenhaus assicura che il gruppo finito G/A^{p^n} contiene un sottogruppo K_n/A^{p^n} tale che $G = K_nA$ e $K_n \cap A = A^{p^n}$. Poichè $A \leq Z(G)$, si ha che K_n è normale in G e G/K_n è abeliano, sicchè $G' \leq K_n$; quindi

$$G' \cap A \leq K_n \cap A = A^{p^n}$$

e perciò
$$G' \cap A \leq \bigcap_{n\geq 1} A^{p^n} = \{1\}.$$
Pertanto $G' \cap A = \{1\}$ e G' è finito. □

COROLLARIO 1.12. *Sia G un gruppo tale che il gruppo quoziente $G/Z(G)$ sia localmente finito. Allora anche il derivato G' di G è localmente finito.*

DIMOSTRAZIONE − Sia X un qualunque sottoinsieme finito di G'. Esiste allora un sottogruppo finitamente generato E di G tale che X sia contenuto in E'. D'altra parte la locale finitezza di $G/Z(G)$ assicura che anche $E/Z(E)$ è finito, sicchè E' è finito per il teorema di Schur. Pertanto G' è localmente finito. □

Per l'importanza del teorema di Schur sembra opportuno citare qui alcuni risultati ad esso collegati, anche se non direttamente coinvolti nella teoria degli FC-gruppi. In primo luogo, il Teorema 1.11 può essere generalizzato, sostituendo al centro un termine della serie centrale superiore (con tipo ordinale finito). Si ha infatti:

TEOREMA 1.13. (R. Baer [**6**]) *Sia G un gruppo tale che il gruppo quoziente $G/Z_i(G)$ sia finito per qualche numero intero non negativo i. Allora anche l'$(i+1)$-esimo termine $\gamma_{i+1}(G)$ della serie centrale inferiore di G è finito.*

Poichè i gruppi con il derivato finito sono FC-gruppi, il Teorema 1.3 assicura che per i gruppi finitamente generati la finitezza del derivato equivale a quella dell'indice del centro. D'altra parte la considerazione di un qualunque gruppo extraspeciale infinito prova che in generale il teorema di Schur non si può invertire. E' però vero che se il derivato G' di un gruppo G è finito, allora il secondo centro $Z_2(G)$ ha indice finito in G. Sussiste infatti il seguente risultato.

TEOREMA 1.14. (P. Hall [**59**]) *Sia G un gruppo tale che il sottogruppo $\gamma_{i+1}(G)$ sia finito per qualche numero intero non negativo i. Allora anche l'indice $|G : Z_{2i}(G)|$ è finito.*

Il risultato di Hall fornisce evidentemente una parziale inversione del teorema di Baer, e insieme ad esso sostanzialmente afferma che in un gruppo G qualche termine della serie centrale superiore (con tipo ordinale finito) ha indice finito se e soltanto se G è finito-per-nilpotente (cioè se e soltanto se esiste un sottogruppo normale finito N di G tale che G/N sia nilpotente). Quest'ultima affermazione è stata recentemente estesa a termini arbitrari della serie centrale superiore di un gruppo.

Teorema 1.15. (M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella, Y.P. Sysak [**30**]) *L'ipercentro di un gruppo G ha indice finito se e solo se G contiene un sottogruppo normale finito N tale che G/N sia ipercentrale.*

La considerazione del 2-gruppo localmente diedrale mostra che i risultati di Baer e Hall non possono invece essere estesi utilizzando termini della serie centrale inferiore con tipo ordinale infinito,

L'ultima parte di questo paragrafo contiene alcune applicazioni del teorema di Schur allo studio degli FC-gruppi.

Corollario 1.16. (B.H. Neumann [**84**]) *Sia G un FC-gruppo. Allora il derivato G' di G è localmente finito. In particolare un qualunque FC-gruppo senza torsione è abeliano.*

Dimostrazione − Il gruppo $G/Z(G)$ è localmente finito per il Teorema 1.6, sicchè l'asserto segue dal Corollario 1.12. □

Corollario 1.17. *Sia G un FC-gruppo. Allora l'insieme degli elementi periodici di G è un sottogruppo.*

Dimostrazione − Qualunque siano gli elementi periodici x e y di G, il laterale xyG' è ovviamente periodico; d'altra parte, il Corollario 1.16 assicura che G' è localmente finito, per cui anche xy è periodico. L'asserto è provato. □

Come conseguenza del Corollario 1.12, è anche possibile ottenere un'inversione parziale del Teorema 1.6. Si ha infatti:

Corollario 1.18. (S.N. Černikov [**17**]) *Sia G un gruppo contenente un sottogruppo centrale senza torsione Z tale che G/Z sia un FC-gruppo periodico. Allora G è un FC-gruppo.*

Dimostrazione − Poichè il gruppo $G/Z(G)$ è localmente finito, il Corollario 1.12 assicura che anche il derivato G' di G è localmente finito. D'altra parte, se x è un qualunque elemento di G e il laterale gZ è un elemento del centralizzante $C_{G/Z}(xZ)$, il commutatore $[x, g]$ appartiene a Z, e quindi è aperiodico. Pertanto $[x, g] = 1$, sicchè $C_G(x) = C_G(xZ)$ ha indice finito in G, e G è un FC-gruppo. □

Infine il prossimo risultato permette sotto certi aspetti di ridurre lo studio degli FC-gruppi al caso periodico.

Teorema 1.19. *Sia G un FC-gruppo. Allora G si può immergere nel prodotto diretto di un gruppo abeliano senza torsione e di un FC-gruppo periodico.*

Dimostrazione – Sia T il sottogruppo costituito dagli elementi periodici di G. Poichè G' è contenuto in T per il Corollario 1.16, il gruppo quoziente G/T è abeliano senza torsione. Si consideri quindi nel centro $Z(G)$ un sottogruppo senza torsione massimale A (la cui esistenza è garantita dal Lemma di Zorn); allora $Z(G)/A$ è periodico, e quindi G/A è un FC-gruppo periodico. D'altra parte si ha $T \cap A = \{1\}$, per cui il gruppo G si può immergere nel prodotto diretto $G/T \times G/A$. □

3. Gruppi con classi di coniugio limitate

Un gruppo G si dice un *BFC-gruppo* se esiste un numero intero positivo k tale che ogni elemento di G sia dotato di al più k coniugati. Poichè si è già osservato che in un qualunque gruppo G ogni classe di coniugio è equipotente ad un sottoinsieme del derivato, si ha subito che i gruppi con il derivato finito sono BFC-gruppi ed il prossimo risultato prova che la finitezza del derivato caratterizza i gruppi con la proprietà BFC.

Teorema 1.20. (B.H. Neumann [**85**]) *Un gruppo G è un BFC-gruppo se e soltanto se il derivato G' di G è finito.*

Dimostrazione – Si supponga che G è un BFC-gruppo, e sia k il massimo ordine delle classi di coniugio degli elementi di G. Si consideri un elemento x di G dotato di esattamente k coniugati, e sia $\{y_1, \dots, y_k\}$ un trasversale destro di $C_G(x)$ in G; ovviamente anche l'intersezione

$$C = \bigcap_{i=1}^{k} C_G(y_i)$$

è un sottogruppo di indice finito in G. Se $\{z_1, \dots, z_t\}$ è un trasversale destro di C in G, si ha allora che la chiusura normale

$$N = \langle x, z_1, \dots, z_t \rangle^G$$

è un sottogruppo finitamente generato di G per il quale risulta $G = NC$. Qualunque sia l'elemento a di C, si ha $(ax)^{y_i} = ax^{y_i}$ per ogni $i \leq k$, sicchè gli elementi $(ax)^{y_1}, \dots, (ax)^{y_k}$ sono tutti i coniugati di ax in G. Se b è un qualunque altro elemento di C, deve allora risultare $(ax)^b = (ax)^{y_i} = ax^{y_i}$ per qualche i, e quindi

$$[a, b] = a^{-1}a^b = x^{y_i}(x^b)^{-1}$$

appartiene a N. Pertanto il derivato C' di C è contenuto in N, e quindi $G' \leq NC' = N$. D'altra parte G' è periodico per il Corollario 1.16, e l'insieme degli elementi periodici di N è un sottogruppo finito, in quanto N è un FC-gruppo finitamente generato. Pertanto G' è finito. $\square$

Dall'ultimo risultato e dal Teorema 1.14 segue in particolare che se G è un BFC-gruppo, allora il secondo termine $Z_2(G)$ della serie centrale superiore di G ha indice finito, per cui tutti i BFC-gruppi a centro identico sono finiti.

Se G è un gruppo con il derivato finito, l'ordine delle classi di coniugio di elementi di G non supera evidentemente l'ordine di G'. Informazioni sulla determinazione di un limite superiore per l'ordine del derivato di un gruppo con la proprietà BFC possono essere trovate in [**119**], [**118**], [**108**], [**21**]; in particolare D. Segal e A. Shalev [**108**] hanno stato provato che se ogni elemento di G ha al più n coniugati, allora l'ordine del derivato di G è al più $n^{(13+\log_2 n)/2}$.

4. Ricoprimenti di gruppi

Sia G un gruppo; un insieme non vuoto $\mathcal{F}$ di sottogruppi di G si dice un *ricoprimento* di G se risulta

$$G = \bigcup_{X\in\mathcal{F}} X,$$

cioè se ogni elemento di G appartiene ad almeno un elemento di $\mathcal{F}$. Ad esempio, qualunque sia il gruppo G, gli insiemi $\{G\}$ e $\{\langle x\rangle \mid x \in G\}$ sono ricoprimenti (banali) di G. Al fine di studiare i gruppi dotati di ricoprimenti finiti costituiti da sottogruppi notevoli è fondamentale un teorema di B.H. Neumann sui gruppi decomponibili nell'unione di un numero finito di laterali di sottogruppi. Si ha anzitutto:

Lemma 1.21. *Sia G un gruppo, e risulti*

$$G = \Big(\bigcup_{i=1}^{s} H_i x_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{t} K y_j\Big),$$

dove $H_1, \dots, H_s, K$ sono sottogruppi di G. Allora si ha $G = \bigcup_{j=1}^{t} K y_j$ oppure G è unione di un numero finito di laterali destri dei sottogruppi $H_1, \dots, H_s$.

Dimostrazione − Si supponga che l'unione $\bigcup_{j=1}^{t} Ky_j$ sia un sottoinsieme proprio di G, e sia z un elemento di $G \setminus \bigcup_{j=1}^{t} Ky_j$; allora

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{t} Ky_j\Big) \cap Kz = \emptyset,$$

e quindi il laterale Kz è contenuto nell'insieme $\bigcup_{i=1}^{s} H_i x_i$. Qualunque sia l'indice $j \leq t$ si ha perciò

$$Ky_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} H_i x_i z^{-1} y_j,$$

ed il gruppo G è unione di un numero finito di laterali destri dei sottogruppi $H_1, \ldots, H_s$. □

Teorema 1.22. (B.H. Neumann [**85**]) *Sia G un gruppo e risulti*

$$G = \bigcup_{i=1}^{t} H_i g_i,$$

dove $H_1, \ldots, H_t$ sono sottogruppi di G. Allora da tale decomposizione possono essere omessi i laterali relativi a sottogruppi di indice infinito.

Dimostrazione − Si proverà in primo luogo che almeno uno dei sottogruppi $H_1, \ldots, H_t$ ha indice finito in G. A tal fine si procede per induzione sul numero m dei sottogruppi distinti tra $H_1, \ldots, H_t$. Se $m = 1$, risulta

$$H_1 = \ldots = H_t,$$

sicchè G è unione di un numero finito di laterali di H_1 e l'indice $|G : H_1|$ è finito. Si supponga invece $m > 1$; a meno di una permutazione dell'insieme degli indici, si può supporre che per qualche $r < t$ risulti

$$H_{r+1} = \ldots = H_t,$$

mentre H_t è diverso da ciascuno dei sottogruppi $H_1, \ldots, H_r$. Se

$$G = \bigcup_{i=r+1}^{t} H_t g_i,$$

si ha ovviamente che il sottogruppo H_t ha indice finito in G; in caso contrario, poichè

$$G = \Big(\bigcup_{i=1}^{r} H_i g_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i=r+1}^{t} H_t g_i\Big),$$

dal Lemma 1.21 segue che G è unione di un numero finito di laterali destri dei sottogruppi $H_1, \dots, H_r$, e tra questi al più $m-1$ sono distinti, sicchè per induzione su m si ottiene che almeno uno di tali sottogruppi ha indice finito in G.

Si supponga che tra i sottogruppi $H_1, \dots, H_t$ ve ne sia qualcuno di indice infinito in G, e si riordino gli indici in modo tale che $H_1, \dots, H_s$ abbiano indice infinito mentre $H_{s+1}, \dots, H_t$ abbiano indice finito in G. La prima parte della dimostrazione assicura che $s < t$. Il sottogruppo

$$K = \bigcap_{i=s+1}^{t} H_i$$

ha ovviamente indice finito in G, e per ogni indice i tale che $s+1 \leq i \leq t$ ogni laterale destro di H_i in G è unione di un numero finito di laterali destri di K. Pertanto G è unione di un numero finito di laterali destri dei sottogruppi $H_1, \dots, H_s, K$. Poichè ciascuno dei sottogruppi $H_1, \dots, H_s$ ha indice infinito in G, la prima parte della dimostrazione ed il Lemma 1.21 provano che G è unione soltanto dei laterali destri relativi a K, e quindi

$$G = \bigcup_{i=s+1}^{t} H_i g_i,$$

il che prova l'asserto. □

Evidentemente, se G è un gruppo il cui centro $Z(G)$ ha indice finito e se $\{x_1, \dots, x_t\}$ è un trasversale di $Z(G)$ in G, risulta

$$G = \bigcup_{i=1}^{t} \langle x_i, Z(G) \rangle$$

e quindi G ha un ricoprimento finito costituito da sottogruppi abeliani. Il prossimo risultato assicura che questa proprietà caratterizza i gruppi col centro di indice finito, e fornisce un facile esempio di come il Teorema 1.22 possa essere usato nello studio dei ricoprimenti di gruppi.

Teorema 1.23. (B.H. Neumann [**85**]) *Sia G un gruppo dotato di un ricoprimento finito costituito da sottogruppi abeliani. Allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito.*

Dimostrazione – Sia $\{A_1, \dots, A_t\}$ un ricoprimento finito di G costituito da sottogruppi abeliani. Per il Teorema 1.22 è possibile suppore che ciascuno dei sottogruppi $A_1, \dots, A_t$ abbia indice finito in G, per cui anche

$$A = A_1 \cap \dots \cap A_t$$

è un sottogruppo di indice finito. D'altra parte A è ovviamente contenuto nel centro di G, e quindi il gruppo $G/Z(G)$ è finito. □

Dal Teorema 1.22 segue anche il seguente risultato sui gruppi ricoperti da FC-sottogruppi.

COROLLARIO 1.24. *Sia G un gruppo dotato di un ricoprimento finito costituito da FC-sottogruppi. Allora G è un FC-gruppo.*

DIMOSTRAZIONE − Sia $\{X_1, \dots, X_t\}$ un ricoprimento finito di G costituito da FC-sottogruppi. Per il Teorema 1.22 è possibile suppore che ciascuno dei sottogruppi $X_1, \dots, X_t$ abbia indice finito in G. Qualunque sia l'elemento x di G, esiste $i \leq t$ tale che x appartenga a X_i; allora il centralizzante $C_{X_i}(x)$ ha indice finito in X_i e quindi anche l'indice $|G : C_{X_i}(x)|$ è finito. In particolare $C_G(x)$ ha indice finito in G, e l'arbitrarietà di x assicura che G è un FC-gruppo. □

COROLLARIO 1.25. *Sia G un gruppo dotato di un ricoprimento finito costituito da sottogruppi con il derivato finito. Allora il derivato G' di G è finito.*

DIMOSTRAZIONE − Sia $\{X_1, \dots, X_t\}$ un ricoprimento finito di G tale che X_i' sia finito per ogni $i = 1, \dots, t$. Il Corollario 1.24 assicura che G è un FC-gruppo, sicchè dal lemma di Dietzmann segue che la chiusura normale

$$N = \langle X_1', \dots, X_t' \rangle^G$$

è finita. D'altra parte G/N ha un ricoprimento finito costituito da sottogruppi abeliani, e quindi il centro di G/N ha indice finito per il Teorema 1.23. Il teorema di Schur assicura allora che $G'N/N$ è finito, per cui tale è anche G'. □

COROLLARIO 1.26. *Sia G un gruppo dotato di un ricoprimento finito costituito da sottogruppi con il centro di indice finito. Allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito.*

DIMOSTRAZIONE − Sia $\mathcal{F}$ un ricoprimento finito di G costituito da sottogruppi con il centro di indice finito. Per il Teorema 1.22 almeno uno degli elementi di $\mathcal{F}$ ha indice finito in G, e quindi G contiene un sottogruppo abeliano di indice finito. D'altra parte G è un FC-gruppo per il Corollario 1.24, e quindi il gruppo $G/Z(G)$ è finito. □

5. Problemi di immersione

Ovviamente il prodotto diretto di ogni famiglia di gruppi con la proprietà FC è un FC-gruppo, sicchè in particolare il prodotto di una qualunque famiglia di gruppi finiti è un FC-gruppo periodico, e quindi tale è anche ogni gruppo immergibile in un prodotto diretto di gruppi finiti. E' allora naturale chiedersi quali gruppi periodici con le classi di coniugio finite siano isomorfi a sottogruppi di prodotti diretti di gruppi finiti; chiaramente ogni gruppo di questo tipo è residualmente finito e si può perciò immergere in un prodotto cartesiano di gruppi finiti. Nel caso numerabile il problema è stato completamente risolto da P. Hall.

Teorema 1.27. (P. Hall [**60**]) *Sia G un FC-gruppo periodico numerabile residualmente finito. Allora G è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

Dimostrazione − Poichè G è numerabile, è possibile indiciare gli elementi di G con l'insieme dei numeri naturali, per cui

$$G = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

Qualunque sia il numero intero positivo n si denoti con G_n la chiusura normale $\langle x_1, \dots, x_n\rangle^G$, sicchè G è unione della successione crescente $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di suoi sottogruppi normali finiti. Si ponga $G_0 = \{1\}$ e $K_0 = G$, e per induzione si supponga definito per qualche n un sottogruppo normale K_n di indice finito in G tale che $G_n \cap K_n = \{1\}$. Poichè G è residualmente finito, esiste un sottogruppo normale N di G tale che G/N sia finito e $G_{n+1} \cap N = \{1\}$; allora anche $K_{n+1} = K_n \cap N$ è un sottogruppo normale di indice finito in G e risulta $G_{n+1} \cap K_{n+1} = \{1\}$. In questo modo è stata definita una successione decrescente $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ di sottogruppi normali di indice finito in G tali che $G_n \cap K_n = \{1\}$ per ogni n. Qualunque sia il numero intero non negativo n, si consideri in G il sottogruppo normale $L_{n+1} = G_nK_{n+1}$. Ovviamente L_{n+1} ha indice finito in G, e risulta

$$G_{n+1} \cap L_{n+1} = G_{n+1} \cap G_nK_{n+1} = G_n.$$

Per ogni elemento $x \neq 1$ di G, esiste un numero intero non negativo m tale che x appartenga all'insieme $G_{m+1} \setminus G_m$; allora x non appartiene a L_{m+1}, e quindi

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} L_{n+1} = \{1\}.$$

Pertanto l'applicazione

$$\varphi : x \in G \longmapsto (xL_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0} \in \underset{n\in\mathbb{N}_0}{\mathrm{Cr}}\,(G/L_{n+1})$$

è un monomorfismo di G nel prodotto cartesiano della famiglia di gruppi finiti $(G/L_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$. D'altra parte per ogni elemento di G è finito l'insieme dei numeri naturali n tali che x non appartenga a G_n, e quindi anche quello degli n per cui x non appartiene a L_{n+1}. Pertanto l'immagine di φ è contenuta nel prodotto diretto dei G/L_{n+1}, e G si può immergere nel prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. $\square$

COROLLARIO 1.28. *Sia G un FC-gruppo numerabile. Allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

DIMOSTRAZIONE – Per il Teorema 1.6 il gruppo $G/Z(G)$ è localmente finito. D'altra parte $G/Z(G)$ è anche residualmente finito, per cui l'asserto segue subito dal Teorema 1.27. $\square$

COROLLARIO 1.29. *Sia G un FC-gruppo numerabile con il centro identico. Allora G è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

L'ipotesi di numerabilità nel Teorema 1.27 è essenziale, come mostra l'esempio seguente. Sia p un numero primo, e nel prodotto cartesiano

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Cr}}\, \mathbb{Z}_{p^n}$$

si consideri il sottogruppo G costituito dagli elementi periodici; ovviamente G è un gruppo abeliano residualmente finito non numerabile, ed è facile provare che non è possibile immergere G nel prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. Si supponga infatti per assurdo che G sia contenuto in un prodotto diretto $E = \mathrm{Dr}_{i\in I} E_i$, dove ogni E_i è un gruppo finito; il prodotto diretto

$$B = \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Dr}}\, \mathbb{Z}_{p^n}$$

è un sottogruppo di G, ed è quindi contenuto in un fattore diretto numerabile K di E. Qualunque sia l'elemento $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di G, denotato con p^m il periodo di x, risulta $x = by$, dove

$$b = (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)$$

è un elemento di B e

$$y = (0, 0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n, \ldots)$$

appartiene a G^p. Pertanto il gruppo quoziente G/B è divisibile, e quindi tale è anche GK/K, il che è assurdo in quanto E/K è residualmente finito.

Non è noto se il Teorema 1.27 possa essere esteso al caso degli FC-gruppi periodici residualmente finiti il cui centro sia numerabile. Un risultato parziale in tale direzione è il seguente.

Teorema 1.30. (L.A. Kurdachenko [**70**]) *Sia G un FC-gruppo metabeliano periodico residualmente finito. Se il centro di G è numerabile, allora G è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

Nell'ambito dei problemi di immersione per gli FC-gruppi periodici è di notevole interesse il seguente risultato.

Teorema 1.31. (Y.M. Gorčakov [**55**]) *Sia G un FC-gruppo periodico. Se G è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto cartesiano di una famiglia di gruppi finiti isomorfi , allora G è si può immergere nel prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

Sia $(G_i)_{i\in I}$ una famiglia di gruppi periodici. Si dice *prodotto centralmente ristretto* dei gruppi G_i, e si denota con il simbolo

$$\operatorname*{Zr}_{i\in I} G_i,$$

il sottogruppo del prodotto cartesiano della famiglia $(G_i)_{i\in I}$ costituito dagli elementi periodici $(x_i)_{i\in I}$ tali che sia finito il sottoinsieme J di I formato dagli indici i per cui x_i non appartenga a $Z(G_i)$. Denotato con T il sottogruppo di torsione del gruppo abeliano $\mathrm{Cr}_{i\in I}\, Z(G_i)$, si ha subito che risulta

$$\operatorname*{Zr}_{i\in I} G_i = \Big(\operatorname*{Dr}_{i\in I} G_i\Big)T.$$

L'uso dei prodotti centralmente ristretti ha permesso di ottenere una completa descrizione degli FC-gruppi periodici residualmente finiti. Vale infatti il seguente fondamentale risultato.

Teorema 1.32. (M.J. Tomkinson [**113**]) *Un gruppo periodico residualmente finito è un FC-gruppo se e soltanto se è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto centralmente ristretto di una famiglia di gruppi finiti.*

Come si è già visto, sussistono varie ragioni per ridurre lo studio dei gruppi con classi di coniugio finite al caso periodico. Peraltro, esistono alcuni problemi sugli FC-gruppi non periodici che non possono essere ricondotti ad analoghe questioni per gli FC-gruppi periodici; l'ultimo enunciato di questo paragrafo riguarda la possibilità di immergere un FC-gruppo nel prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti e di un gruppo abeliano senza torsione.

Teorema 1.33. (L.A. Kurdachenko [**69**]) *Sia G un FC-gruppo periodico. Allora ogni FC-gruppo il cui sottogruppo di torsione sia isomorfo a G si può immergere nel prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti e di un gruppo abeliano senza torsione se e soltanto se $Z(G) = \{1\}$.*

6. Sezioni di prodotti diretti di gruppi finiti

Nel paragrafo precedente si è provato con un esempio che un FC-gruppo periodico residualmente finito non si può in generale immergere nel prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. Vale però il seguente risultato.

TEOREMA 1.34. (Y.M. Gorčakov [**54**]) *Sia G un FC-gruppo periodico residualmente finito. Allora G è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

DIMOSTRAZIONE – Il Teorema 1.32 assicura che esiste una famiglia $(G_i)_{i\in I}$ di gruppi finiti tale che G sia isomorfo ad un sottogruppo del prodotto centralmente ristretto $\mathrm{Zr}_{i\in I}\, G_i$. Si ponga $K = \mathrm{Dr}_{i\in I}\, G_i$ e sia T il sottogruppo di torsione del gruppo abeliano

$$\underset{i\in I}{\mathrm{Cr}}\, Z(G_i) = Z(\underset{i\in I}{\mathrm{Zr}}\, G_i),$$

sicchè G si può identificare con un sottogruppo del prodotto KT. Il gruppo abeliano periodico T può essere immerso in un prodotto diretto della forma $\mathrm{Dr}_{j\in J}\, P_j$, dove ogni P_j è un gruppo di tipo p_j^∞ per qualche numero primo p_j; è allora ben noto che P_j è isomorfo ad un quoziente del gruppo

$$\mathbb{Z}_{p_j} \times \mathbb{Z}_{p_j^2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_j^n} \times \ldots,$$

il che prova che anche T è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. Considerato il prodotto diretto esterno $K\times T$, è immediato verificare che l'applicazione

$$\varphi : (a,x) \in K \times T \longmapsto ax \in KT$$

è un epimorfismo, per cui KT è isomorfo ad un quoziente di $K \times T$. Pertanto G è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. $\square$

P. Hall ha esibito un esempio di un FC-gruppo (non numerabile) di esponente 4 (e con il derivato di ordine 2) che non è isomorfo ad alcuna sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti, sicchè l'ipotesi di residuale finitezza nel Teorema 1.34 è necessaria (ha rilievo osservare qui che tutti gli esempi noti di questo tipo hanno una sezione extraspeciale che non è isomorfa ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti). D'altra parte lo stesso P. Hall ha provato che ogni gruppo periodico numerabile con la proprietà FC è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. Al fine di dimostrare questo risultato sono necessarie alcune brevi premesse.

Sia G un gruppo, e sia $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di sottogruppi normali di G tali che

$$G = \langle G_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle.$$

Si denoti con Ω l'insieme costituito da tutte le coppie (n, x) con $n \in \mathbb{N}$ e $x \in G_n$. Qualunque siano il numero intero positivo m e l'elemento y di G_m è possibile definire una permutazione $\tau_{m,y}$ di Ω ponendo

$$\begin{aligned} \tau_{m,y}(n,x) &= (n,x) && \text{se } m < n \text{ e } x \in G_n \\ \tau_{m,y}(n,x) &= (n,xy) && \text{se } m = n \text{ e } x \in G_n \\ \tau_{m,y}(n,x) &= (n,y^{-1}xy) && \text{se } m > n \text{ e } x \in G_n. \end{aligned}$$

Nel gruppo simmetrico $Sym(\Omega)$ si consideri quindi il sottogruppo

$$\bar{G} = \langle \tau_{m,y} \mid m \in \mathbb{N}, y \in G_m\rangle.$$

Se r e s sono numeri interi positivi, e y e z sono elementi di G_r e G_s, rispettivamente, non è difficile provare che risulta

$$\tau_{s,z}^{-1}\tau_{r,y}\tau_{s,z} = \tau_{r,z^{-1}yz} \qquad \text{se } r \leq s$$

e

$$\tau_{s,z}^{-1}\tau_{r,y}\tau_{s,z} = \tau_{s,z^{-1}yzy^{-1}}\tau_{r,y} \quad \text{se } r > s.$$

Il comportamento del coniugio sui generatori del gruppo $\bar{G}$ permette allora di definire un epimorfismo $\varphi : \bar{G} \longrightarrow G$, ponendo $\varphi(\tau_{m,y}) = y$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ e per ogni $y \in G_m$.

Teorema 1.35. (P. Hall [**60**]) *Sia G un FC-gruppo periodico numerabile. Allora G è isomorfo ad un quoziente di un FC-gruppo periodico numerabile residualmente finito.*

Dimostrazione – Poichè G è un FC-gruppo periodico numerabile, il lemma di Dietzmann assicura che G è unione di una successione crescente $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di sottogruppi normali finiti. Si consideri quindi il gruppo $\bar{G}$, costruito come nelle premesse a questo risultato in corrispondenza di tale successione. In questo caso il gruppo $\bar{G}$ è numerabile, in quanto generato dal suo sottoinsieme numerabile

$$\{\tau_{m,y} \mid m \in \mathbb{N}, y \in G_m\}.$$

Per ogni numero intero positivo n, si denoti con Ω_n il sottoinsieme finito di Ω costituito dalle coppie (n, x) con $x \in G_n$; la definizione delle permutazioni $\tau_{m,y}$ assicura che Ω_n è una parte di Ω invariante rispetto all'azione di $\bar{G}$. Pertanto il sottogruppo $\bar{K}_n$ di $\bar{G}$, costituito dalle permutazioni $g \in \bar{G}$ tali che $(n, x)g = (n, x)$ per ogni $x \in G_n$, è normale ed il gruppo quoziente $\bar{G}/\bar{K}_n$ è finito, in quanto isomorfo ad un gruppo di permutazioni di Ω_n. D'altra parte risulta

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$$

e quindi

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{K}_n = \{1\},$$

sicchè il gruppo $\bar{G}$ è residualmente finito. Qualunque sia il numero intero positivo m e qualunque sia $y \in G_m$, la permutazione $\tau_{m,y}$ fissa gli elementi di Ω_n per ogni $n > m$, per cui $\tau_{m,y}$ è un elemento periodico di $\bar{G}$; inoltre le proprietà del coniugio preventivamente descritte assicurano che per ogni numero intero positivo n ciascun elemento dell'insieme finito

$$\{\tau_{m,y} \mid m \leq n, y \in G_m\}$$

ha un numero finito di coniugati, sicchè

$$\bar{E}_n = \langle \tau_{m,y} \mid m \leq n, y \in G_m \rangle^{\bar{G}}$$

è un sottogruppo normale finito di $\bar{G}$ per il lemma di Dietzmann. Poichè

$$\bar{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{E}_n,$$

il gruppo $\bar{G}$ è un FC-gruppo periodico, il che prova l'asserto in quanto G è isomorfo ad un quoziente di $\bar{G}$. □

Corollario 1.36. *Sia G un FC-gruppo periodico numerabile. Allora G è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

Dimostrazione – Per il Teorema 1.35 il gruppo G è isomorfo ad un quoziente di un FC-gruppo periodico numerabile residualmente finito $\bar{G}$. D'altra parte $\bar{G}$ è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti per il Teorema 1.27, e quindi G è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto della stessa famiglia. □

Il Corollario 1.36 può essere migliorato imponendo l'ipotesi di numerabilità soltanto al gruppo quoziente $G/Z(G)$ invece che a G. Si ha infatti:

Corollario 1.37. *Sia G un FC-gruppo periodico tale che $G/Z(G)$ sia numerabile. Allora G è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

Dimostrazione – Si consideri un trasversale W di $Z(G)$ in G, e si ponga $N = \langle W \rangle$. Poichè $G/Z(G)$ è numerabile, tale è anche N; inoltre $G = NZ(G)$, ed in particolare N è un sottogruppo normale di G. Il Corollario 1.36 assicura che N è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. D'altra parte $Z(G)$ è un gruppo abeliano periodico, e quindi può essere immerso in un prodotto diretto della forma

$\mathrm{Dr}_{i \in I} P_i$, dove ogni P_i è un gruppo di tipo ${p_i}^{\infty}$ per qualche numero primo p_i; è allora ben noto che P_i è isomorfo ad un quoziente del gruppo

$$\mathbb{Z}_{p_i} \times \mathbb{Z}_{p_i^2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_i^n} \times \ldots ,$$

il che prova che anche $Z(G)$ è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. Considerato il prodotto diretto esterno $N \times Z(G)$, è immediato verificare che l'applicazione

$$\varphi : (a, x) \in N \times Z(G) \longmapsto ax \in G$$

è un epimorfismo, per cui G è isomorfo ad un quoziente del gruppo $N \times Z(G)$, e quindi anche ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. $\square$

Si segnala infine il seguente rilevante risultato, riguardante le proprietà di immersione del derivato di un qualunque FC-gruppo. E' il caso di osservare che per il Teorema 1.19 il derivato di un arbitrario FC-gruppo è anche derivato di un FC-gruppo periodico.

Teorema 1.38. (M.J. Tomkinson [**112**]) *Sia G un FC-gruppo. Allora il derivato G' di G è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

7. Coniugio locale negli FC-gruppi

E' ben noto che il teorema di Sylow non si può estendere al caso infinito, in quanto esistono gruppi localmente finiti contenenti sottogruppi di Sylow relativi ad uno stesso numero primo che non sono equipotenti (e quindi ovviamente neppure isomorfi). Il nostro prossimo scopo è provare che la situazione è migliore nel caso degli FC-gruppi; poichè l'insieme degli elementi periodici di G è un sottogruppo, è chiaro che è possibile limitare la nostra attenzione al caso degli FC-gruppi periodici. D'altra parte è facile osservare che in un FC-gruppo periodico numerabile i sottogruppi di Sylow non sono necessariamente coniugati. Infatti, sia $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di gruppi tutti isomorfi al gruppo simmetrico $Sym(3)$, e si consideri il prodotto diretto $G = \mathrm{Dr}_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Poichè ogni G_n contiene tre 2-sottogruppi di Sylow, si ha subito che l'insieme dei 2-sottogruppi di Sylow di G non è numerabile; la numerabilità di G assicura allora che i suoi 2-sottogruppi di Sylow non riempiono un'unica classe di coniugio.

Sia G un gruppo. Un automorfismo φ di G si dice *localmente interno* se per ogni parte finita $\{x_1, \ldots, x_t\}$ di G esiste un elemento g di G tale che

$x_i^\varphi = x_i^g$ per ogni $i = 1, \ldots, t$. Chiaramente l'insieme $LInnG$ costituito da tutti gli automorfismi localmente interni di G è un sottogruppo dell'automorfo $AutG$ e contiene il gruppo $InnG$ di tutti gli automorfismi interni di G; inoltre, se G è un gruppo finito, risulta $LInnG = InnG$. Si noti anche che ogni sottogruppo normale di un gruppo G è fissato da tutti gli automorfismi localmente interni di G. La struttura del gruppo degli automorfismi localmente interni è stata studiata da vari autori. In particolare D.J.S. Robinson, S.E. Stonehewer e J. Wiegold [**99**] hanno provato che se G è un FC-gruppo il cui centro ha indice infinito α, allora la cardinalità di $LInnG$ è 2^α; un notevole corollario di tale risultato assicura che il gruppo degli automorfismi esterni di un qualunque FC-gruppo periodico infinito è infinito.

Se G è un gruppo, i sottogruppi H e K di G si dicono *localmente coniugati* se esiste un automorfismo localmente interno φ di G tale che $H^\varphi = K$. Evidentemente, sottogruppi coniugati sono anche localmente coniugati e sottogruppi localmente coniugati sono isomorfi, ma due sottogruppi localmente coniugati di un gruppo infinito possono non essere coniugati.

In un qualunque gruppo residualmente finito G è possibile introdurre in modo naturale una topologia (la topologia *profinita*) scegliendo come base per gli aperti l'insieme di tutti i laterali dei sottogruppi normali di indice finito; il gruppo topologico così costruito è compatto, e i sottogruppi chiusi sono tutti e soli quelli che si possono ottenere come intersezione di sottogruppi di indice finito. In particolare, nel caso degli FC-gruppi periodici residualmente finiti, i metodi topologici introdotti mediante la topologia profinita hanno un ruolo fondamentale per lo studio dei problemi di coniugio. La descrizione dettagliata di tali metodi è fuori dalla portata di questi appunti; queste considerazioni topologiche permettono comunque di dimostrare il prossimo risultato, il cui utilizzo è fondamentale per i nostri scopi. Si ricordi che un *sistema locale* di un gruppo G è un ricoprimento $\mathfrak{L}$ di G costituito da sottogruppi tale che per ogni coppia (X, Y) di elementi di $\mathfrak{L}$ esista un elemento di $\mathfrak{L}$ contenente sia X che Y.

Teorema 1.39. (S.E. Stonehewer [**111**]) *Sia G un FC-gruppo, e sia $\mathfrak{L}$ un sistema locale di G costituito da sottogruppi finitamente generati e normali. Per ogni elemento X di $\mathfrak{L}$ sia inoltre Γ_X un insieme non vuoto di automorfismi di X indotti da automorfismi interni di G tale che se $X \leq Y \in \mathfrak{L}$ ogni elemento di Γ_Y induce su X un elemento di Γ_X. Allora esiste un automorfismo localmente interno di G che induce su ogni elemento X di $\mathfrak{L}$ un elemento di Γ_X.*

Dal risultato precedente segue in primo luogo che negli FC-gruppi gli automorfismi localmente interni dei sottogruppi possono essere prolungati ad automorfismi localmente interni dell'intero ambiente. Si ha infatti:

Corollario 1.40. *Sia G un FC-gruppo, e sia H un sottogruppo di G. Se θ è un automorfismo localmente interno di H, esiste un automorfismo localmente interno φ di G la cui restrizione ad H coincide con φ.*

Dimostrazione – Poichè G è un FC-gruppo, esiste un sistema locale $\mathfrak{L}$ di G costituito da sottogruppi normali e finitamente generati. Se X è un qualunque elemento di $\mathfrak{L}$, il gruppo $X/Z(X)$ è finito, per cui $H \cap X$ è finitamente generato e θ opera su $H \cap X$ come un automorfismo interno; allora è non vuoto l'insieme Γ_X costituito da tutti gli automorfismi di X indotti da automorfismi interni di G e che coincidano con θ su $H \cap X$. Il Teorema 1.39 assicura quindi che esiste un automorfismo localmente interno φ di G che induce su ogni X un elemento di Γ_X; in particolare φ coincide con θ su $H \cap X$ per ogni elemento X di $\mathfrak{L}$, e quindi $\varphi_H = \theta$. □

Il prossimo risultato mostra che in un qualunque FC-gruppo un sottogruppo non può essere localmente coniugato ad un suo sottogruppo proprio.

Teorema 1.41. *Sia G un FC-gruppo, e siano H un sottogruppo e φ un automorfismo localmente interno di G tale che $H^\varphi \leq H$. Allora risulta $H^\varphi = H$.*

Dimostrazione – Sia $\mathfrak{L}$ un sistema locale di G costituito da sottogruppi normali e finitamente generati. Qualunque sia l'elemento X di $\mathfrak{L}$, il sottogruppo $H \cap X$ è finitamente generato, e quindi esiste un elemento g_X di G tale che

$$(H \cap X)^{g_X} = (H \cap X)^\varphi = H^\varphi \cap X^\varphi \leq H \cap X.$$

Ovviamente l'intersezione $H \cap X \cap Z(G)$ è un sottogruppo normale di G, e $H \cap X/H \cap X \cap Z(G)$ è isomorfo al suo sottogruppo $(H \cap X)^{g_X}/H \cap X \cap Z(G)$. D'altra parte, la locale finitezza di $G/Z(G)$ assicura che $H \cap X/H \cap X \cap Z(G)$ è finito, per cui $H \cap X = (H \cap X)^{g_X}$ per ogni $X \in \mathfrak{L}$. Pertanto

$$H^\varphi = \bigcup_{X \in \mathfrak{L}} (H \cap X)^\varphi = \bigcup_{X \in \mathfrak{L}} (H \cap X)^{g_X} = \bigcup_{X \in \mathfrak{L}} (H \cap X) = H,$$

e l'asserto è provato. □

Sia G un gruppo, e sia H un sottogruppo di G. L'insieme di tutti i sottogruppi di G che sono localmente coniugati ad H si chiama *classe di coniugio locale* di H in G, e si denota con il simbolo $LC\ell_G(H)$. In modo analogo, la classe di coniugio di H in G sarà denotata nel seguito con il simbolo

$C\ell_G(H)$; ovviamente risulta $C\ell_G(H) \subseteq LC\ell_G(H)$ per ogni sottogruppo H del gruppo G.

LEMMA 1.42. *Sia G un FC-gruppo, e siano H un sottogruppo e x un elemento di G. Allora l'indice $|H : H \cap H^x|$ è finito.*

DIMOSTRAZIONE – Il sottogruppo $H \cap C_G(x)$ è ovviamente fissato da x, e quindi è contenuto in $H \cap H^x$. D'altra parte $C_G(x)$ ha indice finito in G, e quindi anche l'indice $|H : H \cap H^x|$ è finito. □

LEMMA 1.43. *Sia G un FC-gruppo, e sia H un sottogruppo di G. La classe di coniugio $C\ell_G(H)$ è finita se e soltanto se il gruppo H/H_G è finito.*

DIMOSTRAZIONE – Si supponga in primo luogo che la classe di coniugio di H in G sia finita. Il Lemma 1.42 assicura che l'indice $|H : H \cap H^x|$ è finito per ogni elemento x di G, sicchè anche il nocciolo

$$H_G = \bigcap_{x \in G} H^x = \bigcap_{x \in G} (H \cap H^x)$$

ha indice finito in H. Reciprocamente, sia H/H_G finito. Per il lemma di Dietzmann è allora finita anche la chiusura normale H^G/H_G di H/H_G in G/H_G; poichè risulta $H_G \leq H^x \leq H^G$ per ogni elemento x di G, la classe di coniugio $C\ell_G(H)$ è finita. □

LEMMA 1.44. *Sia G un FC-gruppo, e sia H un sottogruppo di G tale che la classe di coniugio $C\ell_G(H)$ sia finita. Allora risulta $LC\ell_G(H) = C\ell_G(H)$.*

DIMOSTRAZIONE – Poichè la classe di coniugio di H in G è finita, il Lemma 1.43 assicura che il nocciolo H_G di H in G ha indice finito in H, per cui esiste una parte finita $\{h_1, \ldots, h_t\}$ di H tale che

$$H = \langle H_G, h_1, \ldots, h_t \rangle.$$

Qualunque sia l'automorfismo localmente interno φ di G, esiste un elemento x di G tale che $h_i^\varphi = h_i^x$ per ogni $i = 1, \ldots, t$; allora risulta

$$H^\varphi = \langle H_G, h_1^\varphi, \ldots, h_t^\varphi \rangle = \langle H_G, h_1^x, \ldots, h_t^x \rangle = H^x,$$

per cui H e H^φ sono coniugati in G e $LC\ell_G(H) = C\ell_G(H)$. □

LEMMA 1.45. *Sia G un FC-gruppo periodico, e siano P un p-sottogruppo di Sylow e X un sottogruppo normale finito di G. Allora $P \cap X$ è un p-sottogruppo di Sylow di X.*

Dimostrazione – Ovviamente P è un p-sottogruppo di Sylow del gruppo XP, e l'indice $|XP : P|$ è finito, sicchè P contiene un sottogruppo normale N di XP tale che XP/N sia finito. Poichè P/N è un p-sottogruppo di Sylow di XP/N, per il teorema di Sylow si ha che $P \cap XN/N$ è un p-sottogruppo di Sylow di XN/N. L'isomorfismo naturale tra XN/N e $X/X \cap N$ assicura allora che $P \cap X/X \cap N$ è un p-sottogruppo di Sylow di $X/X \cap N$, e quindi $P \cap X$ è un p-sottogruppo di Sylow di X. □

Siamo ora in grado di provare il risultato principale di questo paragrafo, che in qualche modo estende il teorema di Sylow agli FC-gruppi periodici.

Teorema 1.46. (R. Baer [**4**]) *Sia G un FC-gruppo periodico, e sia p un numero primo. Allora due qualunque p-sottogruppi di Sylow di G sono localmente coniugati, e quindi anche isomorfi.*

Dimostrazione – Siano P e Q p-sottogruppi di Sylow di G, e sia $\mathfrak{L}$ un sistema locale di G costituito da sottogruppi normali finiti. Qualunque sia l'elemento X di $\mathfrak{L}$, il Lemma 1.45 assicura che $P \cap X$ e $Q \cap X$ sono p-sottogruppi di Sylow di X, e quindi sono coniugati in X, per cui è non vuoto l'insieme Γ_X costituito da tutti gli automorfismi θ di X indotti da automorfismi interni di G e tali che $(P \cap X)^\theta = Q \cap X$; è anche chiaro che se X e Y sono elementi di $\mathfrak{L}$ tali che $X \leq Y$, allora ogni elemento di Γ_Y induce su X un elemento di Γ_X. Pertanto il Teorema 1.39 assicura che esiste un automorfismo localmente interno φ di G che induce su ogni elemento X di $\mathfrak{L}$ un elemento di Γ_X, e perciò $(P \cap X)^\varphi = Q \cap X$. Pertanto risulta

$$P^\varphi = \bigcup_{X \in \mathfrak{L}} (P \cap X)^\varphi = \bigcup_{X \in \mathfrak{L}} (Q \cap X) = Q,$$

e i sottogruppi P e Q sono localmente coniugati in G. □

Corollario 1.47. *Sia G un FC-gruppo periodico, e sia P un p-sottogruppo di Sylow di G dotato di un numero finito di coniugati in G. Allora due qualunque p-sottogruppi di Sylow di G sono coniugati.*

Dimostrazione – Si denoti con $Syl_p(G)$ l'insieme dei p-sottogruppi di Sylow di G. Applicando il Teorema 1.46 ed il Lemma 1.44 si ha allora

$$Syl_p(G) = LC\ell_G(P) = C\ell_G(P),$$

e quindi due qualunque p-sottogruppi di Sylow di G sono coniugati. □

Il Corollario 1.47 fornisce una condizione che è anche necessaria per il coniugio dei sottogruppi di Sylow di un FC-gruppo periodico. Si ha infatti:

TEOREMA 1.48. (M.I. Kargapolov [**67**]) *Sia G un FC-gruppo periodico, e sia p un numero primo. Allora i p-sottogruppi di Sylow di G sono coniugati se e soltanto se l'insieme dei p-sottogruppi di Sylow di G è finito.*

Si osservi che nei risultati precedenti l'ipotesi di periodicità sul gruppo G può essere omessa, in quanto il Corollario 1.17 assicura che in un qualunque FC-gruppo l'insieme degli elementi periodici è un sottogruppo ed il Corollario 1.40 permette di prolungare gli automorfismi localmente interni dei sottogruppi di un FC-gruppo ad automorfismi localmente interni del gruppo.

CAPITOLO 2

Aspetti speciali

1. Restrizioni sulle classi di coniugio

Sia $\mathfrak{X}$ una classe di gruppi. Un gruppo G si dice un $\mathfrak{X}C$*-gruppo* (o anche un gruppo con $\mathfrak{X}$-*classi di coniugio*) se per ogni elemento x di G il gruppo quoziente $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ appartiene alla classe $\mathfrak{X}$. Evidentemente, se $\mathfrak{I}$ è la classe costituita soltanto dai gruppi identici, gli $\mathfrak{I}C$-gruppi sono tutti e soli i gruppi abeliani, e più in generale, denotata per ogni numero intero non negativo c con $\mathfrak{N}_c$ la classe dei gruppi nilpotenti di classe al più c, si ha che un gruppo G verifica la proprietà $\mathfrak{N}_cC$ se e soltanto se è nilpotente di classe al più $c+1$. D'altra parte, se $\mathfrak{F}$ denota la classe dei gruppi finiti, gli $\mathfrak{F}C$-gruppi sono esattamente i gruppi a classi di coniugio finite, sicchè la proprietà $\mathfrak{X}C$ può essere considerata come una generalizzazione della proprietà FC per ogni classe $\mathfrak{X}$ di gruppi contenente la classe dei gruppi finiti, cioè per ogni classe finitaria di gruppi.

Si ricordi che un gruppo G si dice un *gruppo di Černikov* se verifica la condizione minimale sui sottogruppi e contiene un sottogruppo abeliano di indice finito. Ovviamente ogni gruppo di Černikov è localmente finito; inoltre la classe dei gruppi di Černikov è chiusa rispetto a sottogruppi, quozienti ed estensioni. La struttura dei gruppi di Černikov è completamente descritta (cfr. [**94**] Part 1, Chapter 2): se G è un gruppo di Černikov, il suo residuale finito ha indice finito ed è prodotto diretto di un numero finito di gruppi di Prüfer. E' anche noto che un gruppo risolubile è di Černikov se e soltanto se verifica la condizione minimale sui sottogruppi.

Un gruppo G si dice un CC*-gruppo* se è a classi di coniugio di Černikov, cioè se il gruppo quoziente $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ è di Černikov per ogni elemento x di G. I CC-gruppi sono stati introdotti da Y.D. Polovickiĭ nel 1964, come una prima naturale generalizzazione degli FC-gruppi. Al fine di fornire le prime informazioni sulla struttura dei CC-gruppi, è opportuno estendere il teorema di Schur alla classe dei gruppi di Černikov.

Teorema 2.1. (Y.D. Polovickiĭ [**91**]) *Sia G un gruppo tale che il gruppo quoziente $G/Z(G)$ sia un gruppo di Černikov. Allora anche il derivato G' di G è di Černikov.*

Dimostrazione – Sia $J/Z(G)$ il residuale finito di $G/Z(G)$. Poichè $J/Z(G)$ è abeliano, J è nilpotente di classe al più 2, sicchè l'applicazione

$$\theta : (xZ(G), yZ(G)) \in J/Z(G) \times J/Z(G) \longmapsto [x, y] \in J'$$

è bilineare e quindi induce un epimorfismo

$$\bar{\theta} : J/Z(G) \otimes J/Z(G) \longrightarrow J'.$$

D'altra parte il prodotto tensoriale $J/Z(G) \otimes J/Z(G)$ è nullo, in quanto $J/Z(G)$ è divisibile e periodico; pertanto $J' = \{1\}$ e J è abeliano. Poichè G/J è finito, esiste un sottogruppo finitamente generato E di G tale che $G = JE$. Il gruppo $E/E \cap Z(G)$ è finito e risulta $E \cap Z(G) \leq Z(E)$, sicchè dal teorema di Schur segue che il derivato E' di E è finito. Sia $\{x_1, \ldots, x_t\}$ un trasversale di $E \cap Z(G)$ in E; allora si ha

$$[J, E] = [J\langle x_1, \ldots, x_t\rangle] = \langle [J, x_i] \mid i = 1, \ldots, t\rangle.$$

Poichè per ogni $i = 1, \ldots, t$ l'applicazione

$$\varphi_i : a \in J \longmapsto [a, x_i] \in [J, x_i]$$

è un epimorfismo il cui nucleo contiene $Z(G)$, ciascuno dei sottogruppi

$$[J, x_1], \ldots, [J, x_t]$$

è di Černikov. Pertanto $[J, E]$ è un gruppo di Černikov, e quindi tale è anche $G' = [J, E]E'$. □

Corollario 2.2. *Sia G un CC-gruppo. Allora il derivato G' di G è localmente finito.*

Dimostrazione – Sia E un qualunque sottogruppo finitamente generato di G'. Allora esiste una parte finita X di G tale che E sia contenuto nel derivato di $\langle X\rangle$. Poichè $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ è un gruppo di Černikov per ogni $x \in X$ e

$$C_G(\langle X\rangle^G) = \bigcap_{x \in X} C_G(\langle x\rangle^G),$$

anche il gruppo $C_G(\langle X\rangle^G)$ è di Černikov. In particolare $\langle X\rangle^G/Z(\langle X\rangle^G)$ è di Černikov, sicchè tale è anche $(\langle X\rangle^G)'$ per il Teorema 2.1. Pertanto E è finito e G' è localmente finito. □

Se $\mathfrak{X}$ è una classe di gruppi, dalla definizione segue che per analizzare la struttura degli $\mathfrak{X}C$-gruppi è fondamentale poter disporre di informazioni sul comportamento dei gruppi di automorfismi di $\mathfrak{X}$-gruppi. Nel caso dei

CC-gruppi è possibile utilizzare il seguente rilevante risultato sui gruppi di automorfismi dei gruppi di Černikov; esso in particolare assicura che i gruppi periodici di automorfismi di gruppi di Černikov sono di Černikov, e che ogni gruppo periodico di automorfismi di un gruppo abeliano a condizione minimale è finito.

Lemma 2.3. (R. Baer [**8**]) *Sia G un gruppo di Černikov e sia Γ un gruppo periodico di automorfismi di G. Allora il gruppo $\Gamma/\Gamma \cap InnG$ è finito.*

Il prossimo risultato estende il lemma di Dietzmann ai gruppi con la proprietà CC, e prova in particolare che i CC-gruppi periodici sono esattamente i gruppi dotati di un ricoprimento costituito da sottogruppi normali di Černikov.

Teorema 2.4. (Y.D. Polovickiĭ [**92**]) *Un gruppo periodico G è un CC-gruppo se e soltanto se per ogni elemento x di G la chiusura normale $\langle x \rangle^G$ è un gruppo di Černikov.*

Dimostrazione − La sufficienza della condizione segue direttamente dal Lemma 2.3. Reciprocamente, sia G un CC-gruppo e siano x un qualunque elemento di G e $X = \langle x \rangle^G$. Posto $C = C_G(X)$, il gruppo quoziente G/C è di Černikov, per cui tale è $X/Z(X)$ e il Teorema 2.1 assicura allora che anche X' è di Černikov; sostituendo G con il gruppo G/X' si può allora supporre senza ledere la generalità che X è abeliano. Sia J/C il residuale finito di G/C, sicchè J ha indice finito in G. Si consideri un qualunque elemento a di J. Poichè $G/C_G(\langle a, x \rangle^G$ è un gruppo di Černikov, come prima dal Teorema 2.1 segue che $(\langle a, x \rangle^G)'$ è di Černikov; pertanto anche l'interderivato $[a, X]$ è un gruppo di Černikov. D'altra parte J' è contenuto in C, per cui

$$[a, X]^J \leq [a^J, X] = [a, X]$$

e $[a, X]$ è un sottogruppo normale di J. Poichè $[a, X]$ è contenuto in X, si ha $C \leq C_J([a, X])$ e quindi $J/C_J([a, X])$ è un gruppo abeliano divisibile; ma X è abeliano, per cui tale è $[a, X]$ e per il Lemma 2.3 si ha che $J/C_J([a, X])$ è finito. Pertanto $J = C_J([a, X])$ e $[a, X]$ è contenuto nel centro di J; l'arbitrarietà di a in J assicura allora che $[J, X, J] = \{1\}$. L'applicazione

$$aC \in J/C \longmapsto [a, x] \in [J, x]$$

è ben definita perchè $[C, x] = \{1\}$, ed è inoltre un epimorfismo in quanto $[J, x, J] = \{1\}$. Pertanto $[J, x]$ è un gruppo di Černikov. Sia $\{y_1, \ldots, y_t\}$ un trasversale di J in G. Qualunque sia l'indice $i = 1, \ldots, t$ si ha che $[J, x]^{y_i}$ è un sottogruppo normale di Černikov di J, sicchè

$$K = \langle [J, x]^{y_1}, \ldots, [J, x]^{y_t} \rangle$$

è un sottogruppo normale di Černikov di G. D'altra parte il Corollario 2.2 assicura che il sottogruppo $\langle [y_1, x], \dots, [y_t, x] \rangle$ è finito, per cui

$$[G, x] = \langle K, [y_1, x], \dots, [y_t, x] \rangle$$

è un gruppo di Černikov e quindi tale è anche $\langle x \rangle^G$. □

Per quanto riguarda i problemi di immersione, è stato dimostrato da S. Franciosi, F. de Giovanni e M.J. Tomkinson [**47**] che ogni CC-gruppo a centro identico si può immergere nel prodotto diretto di una famiglia di gruppi di Černikov (un risultato da confrontare con il Corollario 1.29), mentre M. Gonzalez e J. Otal [**53**] hanno ottenuto un'estensione parziale del Teorema 1.32 al caso dei CC-gruppi. Infine, generalizzando il Teorema 1.46, J. Alcazar e J. Otal [**2**] hanno provato che in un qualunque CC-gruppo i sottogruppi di Sylow relativi ad uno stesso numero primo sono localmente coniugati.

Sia $\mathfrak{X}$ una classe di gruppi chiusa rispetto a sottogruppi e quozienti. Un gruppo G si dice un *$B\mathfrak{X}C$-gruppo* (o un gruppo a classi di coniugio *uniformemente* $\mathfrak{X}$) se esiste un gruppo Q nella classe $\mathfrak{X}$ tale che per ogni elemento x di G il gruppo quoziente $G/C_G(\langle x \rangle^G)$ sia isomorfo ad una sezione di Q. Ovviamente ogni gruppo a classi di coniugio uniformemente $\mathfrak{X}$ è un $\mathfrak{X}C$-gruppo. Inoltre, poichè per ogni numero intero positivo n esistono (a meno di isomorfismi) soltanto un numero finito di gruppi finiti di ordine al più n, si ha subito che un gruppo è a classi di coniugio uniformemente finite se e soltanto se ha la proprietà BFC. Pertanto il prossimo risultato è un'estensione del Teorema 1.20 al caso dei gruppi a classi di coniugio uniformemente di Černikov.

Teorema 2.5. (S. Franciosi, F. de Giovanni e L.A. Kurdachenko [**42**]) *Sia G un gruppo risolubile a classi di coniugio uniformemente di Černikov. Allora il derivato G' di G è un gruppo di Černikov.*

Si ricordi che un gruppo G si dice *policiclico* se è dotato di una serie finita a fattori ciclici contenente i sottogruppi banali. Evidentemente ogni gruppo policiclico è risolubile, ed è facile provare che un gruppo risolubile è policiclico se e soltanto se verifica la condizione massimale sui sottogruppi. Si ha anche subito che la classe dei gruppi policiclici è chiusa rispetto a sottogruppi, quozienti ed estensioni. Il gruppo G si dice invece *policiclico-per-finito* se contiene un sottogruppo policiclico di indice finito; la classe dei gruppi con tale proprietà, che in qualche senso dualizza quella dei gruppi di Černikov, sarà denotata nel seguito con il simbolo $\mathcal{P}$.

Un gruppo G si dice un *PC-gruppo* se per ogni elemento x di G il gruppo quoziente $G/C_G(\langle x \rangle^G)$ è policiclico-per-finito (cioè se G ha la proprietà $\mathcal{P}C$).

Evidentemente ogni PC-gruppo periodico è un FC-gruppo. Nel seguito si esporranno alcuni risultati che evidenziano come certe proprietà rilevanti degli FC-gruppi possano essere generalizzate al caso dei PC-gruppi. Per altre proprietà dei PC-gruppi si consultino gli articoli [**46**] e [**42**]. E' in primo luogo opportuno ricordare il seguente risultato di P. Hall.

Lemma 2.6. (P. Hall [**58**]) *Sia G un gruppo finitamente generato contenente un sottogruppo normale abeliano A tale che G/A sia policiclico-per-finito. Allora G verifica la condizione massimale sui sottogruppi normali.*

Per quanto riguarda il gruppo degli automorfismi di un gruppo policiclico-per-finito, è opportuno menzionare che R. Baer [**7**] ha dimostrato che ogni gruppo iperabeliano di automorfismi di un gruppo policiclico-per-finito è policiclico. Questo risultato è stato esteso in [**46**] nel modo seguente.

Lemma 2.7. *Sia G un gruppo policiclico-per-finito, e sia Γ un gruppo di automorfismi di G. Se Γ contiene un sottogruppo iperabeliano normale Θ tale che Γ/Θ sia localmente finito, allora Γ è policiclico-per-finito.*

Il prossimo risultato può essere considerato come l'analogo del Lemma di Dietzmann per i gruppi a classi di coniugio nella classe $\mathcal{P}$.

Teorema 2.8. (S. Franciosi, F. de Giovanni e M.J. Tomkinson [**46**]) *Un gruppo G è un PC-gruppo se e soltanto se è dotato di un ricoprimento costituito da sottogruppi normali policiclici-per-finiti.*

Dimostrazione – Si supponga in primo luogo G un PC-gruppo, e sia x un qualunque elemento di G. Poichè $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ è policiclico-per-finito, esiste un sottogruppo finitamente ge-nerato E di G tale che $G = EC_G(\langle x\rangle^G)$; la chiusura normale $\langle x\rangle^G = \langle x\rangle^E$ è contenuta nel sottogruppo finitamente generato $H = \langle E, x\rangle$, e per ipotesi il gruppo $G/C_G(H^G)$ è policiclico-per-finito, sicchè tale è anche $H/C_H(H^G)$. In particolare $H/Z(H)$ è policiclico-per-finito, e quindi H verifica la condizione massimale sui sottogruppi normali per il Lemma 2.6. Allora $Z(H)$ verifica la condizione massimale sui sottogruppi, e quindi H è policiclico-per-finito. Pertanto $\langle x\rangle^G$ è policiclico-per-finito per ogni elemento x di G, e quindi G ha un ricoprimento costituito da sottogruppi normali policiclici-per-finiti.

Reciprocamente, sia il gruppo G dotato di un ricoprimento costituito da sottogruppi normali policiclici-per-finiti, e sia x un qualunque elemento di G. Allora il sottogruppo normale $\langle x\rangle^G$ è policiclico-per-finito, ed il gruppo quoziente $\bar{G} = G/C_G(\langle x\rangle^G)$, essendo ricoperto da sottogruppi normali policiclici-per-finiti, contiene un sottogruppo iperabeliano normale $\bar{N}$

tale che $\bar{G}/\bar{N}$ sia localmente finito. Pertanto il Lemma 2.7 assicura che $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ è policiclico-per-finito, e quindi G è un PC-gruppo. □

COROLLARIO 2.9. *Sia G un PC-gruppo, e sia N un sottogruppo normale di G tale che il gruppo quoziente G/N sia policiclico-per-finito. Allora esiste un sottogruppo normale policiclico-per-finito H di G tale che $G = HN$.*

DIMOSTRAZIONE − Poichè G/N è finitamente generato, esiste una parte finita X di G tale che $G = \langle X\rangle N$. Allora il Teorema 2.8 assicura che la chiusura normale $\langle X\rangle^G$ è un sottogruppo policiclico-per-finito, ed è sufficiente porre $H = \langle X\rangle^G$. □

Un ben noto teorema di Hirsch assicura che ogni gruppo policiclico è residualmente finito, sicchè in particolare qualunque sia il PC-gruppo G si ha che il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è residualmente finito. Questa osservazione suggerisce di affrontare, in analogia a quanto fatto per gli FC-gruppi, problemi di immersione anche per i PC-gruppi. D'altra parte, è facile osservare che un risultato analogo al Teorema 1.27 non può essere dimostrato per i PC-gruppi; infatti, qualunque sia il numero primo p, il gruppo additivo $\mathbb{Q}_p$, costituito dai numeri razionali il cui denominatore è una potenza di p, è residualmente finito, ma non può essere immerso nel prodotto diretto di alcuna famiglia di gruppi policiclici-per-finiti. In analogia a quanto accade nel caso dei CC-gruppi, è però possibile dimostrare che ogni PC-gruppo con il centro identico è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto diretto di una famiglia di gruppi policiclici-per-finiti (cfr. [**46**]).

Infine, è il caso di osservare che, al contrario di quanto accade per i gruppi a classi di coniugio uniformemente Černikov, esiste un gruppo a classi di coniugio cicliche (e quindi in particolare nilpotente di classe 2 e a classi di coniugio policicliche) il cui derivato non è neppure minimax (si ricordi che un gruppo si dice *minimax* se ha una serie finita ciascuno dei cui fattori verifica la condizione minimale oppure la condizione massimale sui sottogruppi). Alcune parziali estensioni del Teorema 1.20 ai gruppi con classi di coniugio policicliche sono state ottenute da L.A. Kurdachenko, N.V. Polyakov e I.Y. Subbotin [**72**].

2. Sottogruppi normali generalizzati

Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G si dice *almost normale* se ha soltanto un numero finito di coniugati in G, o equivalentemente se il normalizzante $N_G(H)$ di H ha indice finito in G. Quindi un sottogruppo H

di un gruppo G è almost normale in G se e soltanto se H è normale in un sottogruppo di indice finito di G. Evidentemente ogni sottogruppo normale di un arbitrario gruppo è anche almost normale, mentre in un gruppo finito tutti i sottogruppi sono almost normali; si osservi anche che se un gruppo G è privo di sottogruppi propri di indice finito, allora un suo sottogruppo è almost normale se e soltanto se è normale.

La nozione di almost normalità può facilmente essere usata per descrivere gli FC-gruppi. Si ha infatti:

LEMMA 2.10. *Un gruppo G è un FC-gruppo se e soltanto se ogni suo sottogruppo ciclico è almost normale.*

DIMOSTRAZIONE – Sia in primo luogo G un FC-gruppo. Qualunque sia l'elemento x di G si ha ovviamente $C_G(x) \leq N_G(\langle x \rangle)$, per cui il normalizzante $N_G(\langle x \rangle)$ ha indice finito in G e il sottogruppo ciclico $\langle x \rangle$ è almost normale in G.

Reciprocamente, si supponga che ogni sottogruppo ciclico di G è almost normale, e sia x un qualunque elemento di G. Poichè il sottogruppo $\langle x \rangle$ è normale in $N_G(\langle x \rangle)$, si ha che il gruppo $N_G(\langle x \rangle)/C_G(x)$ è isomorfo ad un gruppo di automorfismi di $\langle x \rangle$ e quindi è finito; dalla finitezza dell'indice $|G : N_G(\langle x \rangle)|$ segue allora quella di $|G : C_G(x)|$. Pertanto il gruppo G ha la proprietà FC. □

E' immediato verificare che in un qualunque gruppo l'intersezione ed il sottogruppo generato da due (e quindi anche da un numero finito) di sottogruppi almost normali è almost normale; d'altra parte, diversamente da quanto avviene per i sottogruppi normali, non è vero che in generale l'intersezione ed il sottogruppo generato da una famiglia di sottogruppi almost normali sia ancora almost normale, neppure nel caso degli FC-gruppi. Ciò segue in particolare da un importante teorema di B.H. Neumann, che descrive la struttura dei gruppi in cui tutti i sottogruppi sono almost normali.

TEOREMA 2.11. (B.H. Neumann [**86**]) *In un gruppo G ogni sottogruppo è almost normale se e soltanto se il centro $Z(G)$ ha indice finito in G.*

Si osservi che dal Teorema 2.11 segue che se in un gruppo G tutti i sottogruppi sono almost normali, allora le classi di coniugio dei sottogruppi di G hanno ordine limitato. Il teorema precedente è stato migliorato nel 1959 da I.I. Eremin, il quale ha ottenuto il seguente risultato.

TEOREMA 2.12. (I.I. Eremin [**51**]) *Sia G un gruppo in cui tutti i sottogruppi abeliani sono almost normali. Allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito.*

E' anche il caso di segnalare che S. Franciosi, F. de Giovanni e L.A. Kurdachenko [**43**] hanno preso in esame il comportamento dei gruppi in cui ogni sottogruppo che non è finitamente generato è almost normale; in virtù del Lemma 2.10 tali gruppi possono essere considerati in qualche senso duali dei gruppi con la proprietà FC.

Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G si dice *nearly normale* se ha indice finito nella sua chiusura normale H^G. Evidentemente ogni sottogruppo normale di un arbitrario gruppo è anche nearly normale, mentre in un gruppo finito tutti i sottogruppi sono nearly normali. Anche i sottogruppi nearly normali possono essere utilizzati per caratterizzare gli FC-gruppi.

LEMMA 2.13. *Un gruppo G è un FC-gruppo se e soltanto se ogni suo sottogruppo ciclico è nearly normale.*

DIMOSTRAZIONE – Si supponga in primo luogo che G è un FC-gruppo, e sia x un qualunque elemento di G. Poichè il derivato G' di G è localmente finito, il sottogruppo normale $[x, G]$ di G è finito, in quanto generato da un sottoinsieme equipotente alla classe di coniugio di x; d'altra parte risulta

$$\langle x \rangle^G = \langle x \rangle [x, G],$$

per cui l'indice $|\langle x \rangle^G : \langle x \rangle|$ è finito e $\langle x \rangle$ è un sottogruppo nearly normale di G.

Reciprocamente, si assuma che ogni sottogruppo ciclico di G è nearly normale, e sia x un qualunque elemento di G. Poichè l'indice $|\langle x \rangle^G : \langle x \rangle|$ è finito, esiste un numero intero positivo n tale che il sottogruppo normale $(\langle x \rangle^G)^n$ di G sia contenuto in $\langle x \rangle$. Ovviamente $\langle x \rangle^G/(\langle x \rangle^G)^n$ è finito, per cui tale è anche il gruppo quoziente

$$G/C_G(\langle x \rangle^G/(\langle x \rangle^G)^n);$$

in particolare si ha che $N_G(\langle x \rangle)$ ha indice finito in G, e quindi $\langle x \rangle$ è un sottogruppo almost normale di G. Allora G è un FC-gruppo per il Lemma 2.10. □

Si osservi che il Lemma 2.10 ed il Lemma 2.13 insieme assicurano che in un gruppo tutti i sottogruppi ciclici sono almost normali se e soltanto se essi sono tutti nearly normali.

Non è difficile provare che in un qualunque gruppo l'intersezione ed il sottogruppo generato da due (e quindi anche da un numero finito) di sottogruppi nearly normali è nearly normale; d'altra parte, anche in questo caso non è vero che in generale l'intersezione ed il sottogruppo generato da una famiglia di sottogruppi nearly normali sia ancora nearly normale, neppure quando il gruppo ha la proprietà FC. E' infatti sufficiente far ricorso ad un altro notevole teorema di Neumann, che descrive la struttura dei gruppi in cui tutti i sottogruppi sono nearly normali.

TEOREMA 2.14. (B.H. Neumann [**86**]) *In un gruppo G ogni sottogruppo è nearly normale se e soltanto se il derivato G' di G è finito.*

E' opportuno osservare che, come nel caso della almost normalità, nell'enunciato del Teorema 2.14 è sufficiente supporre che ogni sottogruppo abeliano del gruppo G abbia indice finito nella sua chiusura normale normale per ottenere che G' è finito.

TEOREMA 2.15. (M.J. Tomkinson [**114**]) *Sia G un gruppo in cui tutti i sottogruppi abeliani sono nearly normali. Allora il derivato G' di G è finito.*

La dimostrazione del Lemma 2.13 sembrerebbe suggerire che la nozione di sottogruppo nearly normale è più forte di quella di sottogruppo almost normale, mentre i due concetti sono di fatto non confrontabili. D'altra parte è il caso di evidenziare la seguente interessante proprietà che, in virtù del teorema di Schur, segue dal Teorema 2.11 e dal Teorema 2.14.

COROLLARIO 2.16. *Sia G un gruppo in cui ogni sottogruppo è almost normale. Allora tutti i sottogruppi di G sono nearly normali.*

In un recente articolo, M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella e Y.P. Sysak [**29**] hanno investigato il comportamento dei gruppi in cui la condizione di almost normalità oppure quella di nearly normalità è imposta ai sottogruppi non abeliani del gruppo. Tra tali gruppi rientrano ovviamente quelli in cui tutti i sottogruppi non abeliani sono normali; la struttura di questi ultimi sarà descritta nel prossimo paragrafo.

Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *normale-per-finito* se il nocciolo H_G di H in G ha indice finito in H. E' chiaro che in un qualunque gruppo ogni sottogruppo normale è normale-per-finito e tale è anche ogni sottogruppo finito; inoltre, se un sottogruppo normale-per-finito H del gruppo G non ha sottogruppi propri di indice finito, è chiaro che H è normale in G. Si osservi infine che se G è un gruppo e H è un sottogruppo di G che sia almost normale e nearly normale, si ha che H^G/H_G è finito, e quindi H è anche normale-per-finito. E' facile capire che lo studio dei sottogruppi di questo tipo presenta notevoli difficoltà. Un gruppo G si dice un *BCF-gruppo* se esiste un numero intero positivo k tale che $|H/H_G| \leq k$ per ogni sottogruppo H di G; il prossimo risultato fornisce un'interessante informazione sulla struttura dei BCF-gruppi periodici.

Teorema 2.17. (J.T. Buckley, J.C. Lennox, B.H. Neumann, H. Smith, J. Wiegold [**16**]) *Sia G un BCF-gruppo localmente finito. Allora G contiene un sottogruppo abeliano di indice finito.*

3. Gruppi metahamiltoniani

E' ben noto che un gruppo non abeliano ha tutti i sottogruppi normali se e soltanto se è prodotto diretto del gruppo dei quaternioni Q_8 di ordine 8 e di un gruppo abeliano periodico privo di elementi di periodo 4. Banalmente, se in un gruppo ogni sottogruppo abeliano è normale si ha subito che tutti i sottogruppi sono normali.

Un gruppo G si dice *metahamiltoniano* se ogni suo sottogruppo non abeliano è normale. La classe dei gruppi metahamiltoniani è stata introdotta e studiata da G.M. Romalis e N.F. Sesekin ([**101**],[**102**],[**103**]). Chiaramente ogni gruppo di Tarski (cioè ogni gruppo semplice infinito i cui sottogruppi non banali hanno ordine primo) è metahamiltoniano. D'altra parte, se si restringe l'attenzione ad una opportuna classe di gruppi risolubili generalizzati, si riesce a dimostrare che in questo ambito i gruppi metahamiltoniani hanno il derivato finito e quindi costituiscono una classe speciale di FC-gruppi.

Un gruppo G si dice *localmente graduato* se ogni suo sottogruppo finitamente generato non identico contiene un sottogruppo proprio di indice finito; in particolare, tutti i gruppi localmente risolubili e tutti i gruppi residualmente finiti sono localmente graduati. Poichè la classe dei gruppi localmente graduati è chiusa rispetto alle estensioni, si ha anche che ogni FC-gruppo è localmente graduato. Allora la nozione di gruppo localmente graduato è abbastanza debole, ma sufficiente ad escludere dalle nostre considerazioni i gruppi di Tarski ed altre simili patologie.

Lemma 2.18. *Sia G un gruppo metahamiltoniano residualmente finito. Allora G è nilpotente oppure contiene un sottogruppo abeliano di indice finito. In particolare G verifica localmente la condizione massimale sui sottogruppi.*

Dimostrazione – Si supponga che G non contiene alcun sottogruppo abeliano di indice finito, e sia $\mathcal{H}$ l'insieme costituito da tutti i sottogruppi di indice finito di G. Allora ogni elemento H di $\mathcal{H}$ è normale in G e il gruppo quoziente G/H ha tutti i sottogruppi normali. Pertanto

$$\gamma_3(G) \leq \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H = \{1\}$$

e quindi G è nilpotente. □

Lemma 2.19. *Sia G un gruppo metahamiltoniano e sia A un sottogruppo normale abeliano senza torsione di G. Se A è finitamente generato, allora A è contenuto in $Z(G)$.*

Dimostrazione – Si supponga per assurdo che esiste un elemento x di G tale che $[A, x] \neq \{1\}$, ed in primo luogo si assuma anche che $A \cap \langle x \rangle = \{1\}$. Ovviamente esiste un numero primo dispari p tale che $[A^{p^n}, x] \neq \{1\}$ per ogni numero intero positivo n. Allora per ogni n il sottogruppo $A^{p^n}\langle x \rangle$ è normale in G, e nel gruppo quoziente $G/A^{p^n}\langle x \rangle$ tutti i sottogruppi sono normali; poichè $p > 2$, si ha che l'interderivato $[A, x]$ è contenuto in $A^{p^n}\langle x \rangle$ e quindi

$$[A, x] \leq \bigcap_{n>0} A^{p^n}\langle x \rangle = \langle x \rangle = \{1\}.$$

Questa contraddizione prova che

$$A \cap \langle x \rangle = \langle x^m \rangle \neq \{1\}.$$

Sia

$$A/A \cap \langle x \rangle = E/A \cap \langle x \rangle \times B/A \cap \langle x \rangle,$$

dove $E/A \cap \langle x \rangle$ è finito e $B/A \cap \langle x \rangle$ è senza torsione. D'altra parte $A \cap \langle x \rangle$ è contenuto in $Z(\langle x, A \rangle)$, per cui $\langle x, E \rangle / Z(\langle x, E \rangle)$ è finito e il teorema di Schur assicura che anche $[E, x]$ è finito. Poichè A è senza torsione, si ha $[E, x] = \{1\}$. Chiaramente A/E è un sottogruppo normale abeliano senza torsione del gruppo metahamiltoniano $\langle x, A \rangle / E$ e $\langle xE \rangle \cap A/E = \{1\}$, per cui segue dalla prima parte della dimostrazione che A/E è contenuto nel centro di $\langle x, A \rangle / E$. Pertanto $[A, x] \leq E$ e quindi $[A, x, x] = \{1\}$. Allora

$$[A, x]^m = [A, x^m] = \{1\},$$

sicchè $[A, x] = \{1\}$ e quest'ultima contraddizione completa la dimostrazione del lemma. □

Lemma 2.20. *Sia G un gruppo metahamiltoniano con il derivato finito. Allora l'ordine di G' è potenza di un numero primo.*

Dimostrazione – Poichè G' è finito, esiste un sottogruppo finitamente generato E di G tale che $E' = G'$. Inoltre $E/Z(E)$ è finito e $Z(E)$ contiene un sottogruppo senza torsione A tale che l'indice $|E : A|$ sia finito; ovviamente

$$G' = E' \simeq E'A/A,$$

e quindi sostituendo G con E/A si può supporre senza ledere la generalità che G è finito. Se X è un qualunque p-sottogruppo di Sylow di G, dall'ipotesi segue che X è normale in G oppure $N_G(X) = C_G(X)$ e in quest'ultimo caso il gruppo G è p-nilpotente (si veda ad esempio [**96**], 10.1.8). Pertanto G in ogni caso contiene un sottogruppo di Sylow normale non identico P, e per il Lemma 1.10 esiste un sottogruppo Q di G tale che $G = Q \ltimes P$. Se Q è abeliano, il derivato G' è contenuto in P e quindi il suo ordine è potenza di un numero primo. Si supponga invece che Q non è abeliano; allora Q è normale in G e $G = P \times Q$. Se P è abeliano, si ha $G' = Q'$ e per induzine sull'ordine di G si ottiene che G' ha ordine potenza di un numero primo. Si supponga infine che P e Q sono entrambi non abeliani. Allora in ciascuno dei gruppi quoziente G/P e G/Q i sottogruppi sono tutti normali, e quindi il derivato di G ha ordine al più 4 (di fatto al più 2 perchè P e Q hanno ordini coprimi). $\square$

Al fine di provare il risultato principale sui gruppi metahamiltoniani è anche necessario ricordare che un gruppo localmente graduato i cui sottogruppi propri sono abeliani è abeliano oppure finito, ed enunciare il seguente importante risultato di P. Hall sui gruppi metabeliani, per una dimostrazione del quale si rinvia a [**94**] (Part 2, Theorem 9.51).

LEMMA 2.21. *Sia G un gruppo metabeliano finitamente generato. Allora G è residualmente finito.*

TEOREMA 2.22. (G.M. Romalis e N.F. Sesekin [**103**]) *Sia G un gruppo metahamiltoniano localmente graduato. Allora G è risolubile con lunghezza derivata al più* 3, *e il derivato G' di G è finito e ha ordine potenza di un numero primo.*

DIMOSTRAZIONE – Si supponga in primo luogo G risolubile. Allo scopo di provare che G' è finito, si può assumere per induzione sulla lunghezza derivata di G che il sottogruppo G'' è finito; sostituendo allora G con il gruppo quoziente G/G'' si può supporre senza ledere la generalità che G è metabeliano. Sia E un sottogruppo finitamente generato non abeliano di G. Allora E è normale in G e tutti i sottogruppi di G/E sono normali. Poichè E è residualmente finito per il Lemma 2.21, dal Lemma 2.18 segue che E è policiclico, per cui G' è finitamente generato. Allora G' è anche il derivato di un sottogruppo finitamente generato di G, sicchè si può assumere che G è finitamente generato, e quindi anche residualmente finito per il Lemma 2.21. Ancora il Lemma 2.18 assicura allora che G contiene un sottogruppo normale nilpotente senza torsione N tale che G/N è finito. Sia A un sottogruppo normale abeliano massimale di N, per cui $C_N(A) = A$; poichè A è contenuto in $Z(N)$ per il Lemma 2.19, si ha che $N = A$ è abeliano. Ancora dal Lemma 2.19 segue allora che N è contenuto in $Z(G)$, e quindi G' è finito per il teorema di Schur.

Nel caso generale, sia $\mathfrak{X}$ l'insieme costituito da tutti i sottogruppi non abeliani di G, e si ponga

$$M = \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} X.$$

Chiaramente ogni elemento X di $\mathfrak{X}$ è un sottogruppo normale di G e tutti i sottogruppi di G/X sono normali, per cui M è normale in G e G'' è contenuto in M. Inoltre ogni sottogruppo proprio di M è abeliano, per cui M è abeliano oppure finito. Pertanto G è in ogni caso estensione finita di un gruppo risolubile. Sia S il più grande sottogruppo normale risolubile di G. Se S è contenuto in $Z(G)$, il gruppo $G/Z(G)$ è finito, per cui tale è anche G' per il teorema di Schur, e in questo caso l'ordine di G' è potenza di un numero primo per il Lemma 2.20. Se invece esiste un elemento x di G tale che $[S, x] \neq \{1\}$, il sottogruppo risolubile $\langle x, S\rangle$ non è abeliano ed è quindi normale in G; allora $\langle x, S\rangle = S$ e tutti i sottogruppi di G/S sono normali, sicchè in tal caso G è risolubile e dalla prima parte della dimostrazione segue che G' è finito ed ha ordine potenza di un numero primo.

Si supponga infine per assurdo che $G^{(3)} \neq \{1\}$, e siano a e b elementi di G'' tali che $[a, b] \neq 1$. Allora $\langle a, b\rangle$ è normale in G e tutti i sottogruppi di $G/\langle a, b\rangle$ sono normali, per cui $G'' = \langle a, b\rangle$ e G'/G'' ha ordine 2. Poichè G' è nilpotente, si ottiene che $G'' = \{1\}$ e questa contraddizione completa la dimostrazione del teorema. $\square$

In un articolo del 1983, N.F. Kuzennyi e N.N. Semko [**73**] hanno provato che in un qualunque gruppo metahamiltoniano localmente graduato ogni sottogruppo non abeliano contiene il derivato. Altre informazioni sulla struttura dei gruppi metahamiltoniani si trovano in [**25**].

A conclusione di questo paragrafo, sembra il caso di menzionare che B. Bruno e R.E. Phillips [**15**] hanno provato che un gruppo localmente risolubile in cui ogni sottogruppo è normale oppure localmente nilpotente deve essere localmente nilpotente oppure avere il derivato finito.

4. Restrizioni sui normalizzanti

Il Teorema 2.11 può essere enunciato affermando che in un gruppo G tutti i normalizzanti dei sottogruppi hanno indice finito se e soltanto se il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito, e questo risultato suggerisce che il comportamento dei normalizzanti ha una forte influenza sulla struttura del gruppo. Nel 1980 Y.D. Polovickiĭ ha caratterizzato i gruppi dotati di un numero finito di normalizzanti di sottogruppi abeliani, provando che tali gruppi sono tutti e soli quelli con il centro di indice finito. E' opportuno osservare che il Teorema 1.22 ha un ruolo centrale nelle questioni riguardanti i gruppi con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi. Il teorema di Polovickiĭ si può ottenere come conseguenza del seguente risultato più generale.

Teorema 2.23. (F. De Mari e F. de Giovanni [**34**]) *Sia G un gruppo in cui al più un numero finito di normalizzanti di sottogruppi abeliani hanno indice infinito. Allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito.*

Dimostrazione – Siano $N_G(X_1), \ldots, N_G(X_k)$ i normalizzanti di indice infinito di sottogruppi abeliani di G. Se F è l'FC-centro di G e x è un qualunque elemento di F, il normalizzante $N_G(\langle x \rangle)$ ha indice finito in G e quindi risulta

$$G = F \cup N_G(X_1) \cup \ldots \cup N_G(X_k),$$

per cui il Teorema 1.22 assicura che $G = F$ è un FC-gruppo. Applicando nuovamente il Teorema 1.22 si ottiene che $N_G(X_1) \cup \ldots \cup N_G(X_k)$ è un sottoinsieme proprio di G. Sia x un elemento di

$$G \setminus (N_G(X_1) \cup \ldots \cup N_G(X_k)),$$

e si consideri un qualunque sottogruppo abeliano infinito A del centralizzante $C_G(x)$; poichè x normalizza A, il normalizzante $N_G(A)$ deve avere indice finito in G. Allora tutti i sottogruppi abeliani di $C_G(x)$ sono almost normali, e quindi $C_G(x)$ ha il centro di indice finito per il Teorema 2.12. D'altra parte l'indice $|G : C_G(x)|$ è finito, sicchè G è un FC-gruppo contenente un sottogruppo abeliano di indice finito e quindi il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito. □

Corollario 2.24. (Y.D. Polovickiĭ [**93**]) *Un gruppo G è dotato di un numero finito di normalizzanti di sottogruppi abeliani se e soltanto se il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito.*

Se G è un qualunque gruppo, la *norma* $N(G)$ di G è l'intersezione dei normalizzanti di tutti i sottogruppi di G. La norma di un gruppo è stata introdotta da R. Baer [**3**] ed in seguito studiata da vari autori; in particolare, E. Schenkman [**104**] ha provato che la norma di un qualunque gruppo G è contenuta nel secondo centro $Z_2(G)$ di G, e questo risultato si può anche ottenere come conseguenza diretta di proprietà elementari degli automorfismi potenza di un gruppo (si consulti [**20**], e si ricordi che un automorfismo α di un gruppo G si dice un *automorfismo potenza* se risulta $X^\alpha = X$ per ogni sottogruppo X di G). Dal Corollario 2.24 segue che se G è un gruppo tale che $G/N(G)$ è finito, allora anche $G/Z(G)$ deve essere finito (un'osservazione che si può ovviamente dedurre anche dal Teorema 2.11). D'altra parte la sezione $N(G)/Z(G)$ è spesso soggetta a forti restrizioni, come e-videnziato da un recente risultato di J.C. Beidleman, H. Heineken e M.L. Newell [**9**].

Negli ultimi anni sono stati considerati gruppi con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi con un'assegnata proprietà. Per un'ampia panoramica su tali ricerche si può consultare l'articolo [**32**]; nel seguito di questo paragrafo ci si limiterà ad enunciare alcuni dei risultati ottenuti.

Banalmente un gruppo è metahamiltoniano se e soltanto se è abeliano oppure ha un unico normalizzante di sottogruppi non abeliani, e tale osservazione suggerisce di studiare i gruppi con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi non abeliani come una naturale generalizzazione dei gruppi metahamiltoniani. Ovviamente la lunghezza derivata dei gruppi risolubili con questa proprietà non può essere limitata, però sussiste il seguente risultato che estende il Teorema 2.22.

TEOREMA 2.25. (F. De Mari e F. de Giovanni [**33**]) *Sia G un gruppo localmente graduato con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi non abeliani. Allora il derivato G' di G è finito.*

La considerazione del gruppo diedrale infinito prova che i gruppi risolubili in cui ogni sottogruppo non abeliano ha un numero finito di coniugati possono avere il derivato infinito. D'altra parte, se $N^*(G)$ denota l'intersezione dei normalizzanti di tutti i sottogruppi non abeliani del gruppo G, dal Teorema 2.25 discende il seguente risultato, che può essere considerato una generalizzazione del teorema di Schur.

COROLLARIO 2.26. *Sia G un gruppo localmente graduato tale che il gruppo quoziente $G/N^*(G)$ sia finito. Allora anche il derivato G' di G è finito.*

L'ultimo risultato di questo paragrafo riguarda i normalizzanti dei sottogruppi che non sono localmente nilpotenti.

TEOREMA 2.27. (F. De Mari e F. de Giovanni [**35**]) *Sia G un gruppo localmente risolubile con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi che non sono localmente nilpotenti. Allora G è localmente nilpotente oppure il suo derivato G' è finito.*

5. Anelli gruppali e FC-gruppi

Lo studio degli anelli gruppali il cui gruppo degli elementi invertibili è un FC-gruppo è stato iniziato da S.K. Seghal e H.J. Zassenhaus [**110**]. Più precisamente questi autori hanno caratterizzato gli anelli gruppali KG per i quali il gruppo $\mathcal{U}(KG)$ degli elementi invertibili è un FC-gruppo, nel caso in cui K è un campo di caratteristica 0. Tale risultato è stato subito esteso da C. Polcino Milies ([**88**],[**89**]) agli anelli gruppali su campi infiniti di caratteristica positiva.

Teorema 2.28. (S.K. Seghal e H.J. Zassenhaus [**110**], C. Polcino Milies [**88**],[**89**]) *Sia K un campo infinito di caratteristica $p \geq 0$ e sia G un gruppo che non contiene elementi di periodo p se $p > 0$. Allora $\mathcal{U}(KG)$ è un FC-gruppo se e soltanto se vale una delle seguenti condizioni:*

(1) *G è abeliano;*
(2) *G è un FC-gruppo non abeliano il cui sottogruppo di torsione T è finito e centrale;*
(3) *G è un FC-gruppo non abeliano il cui sottogruppo di torsione T è centrale e $T = Q \times B$, dove B è finito, $Q \simeq Z(q^\infty)$ per qualche numero primo $q \neq p$ e G' è contenuto in Q. Inoltre, se K_∞ è il campo ottenuto aggiungendo tutte le radici q^n-esime (con $n \in \mathbb{N}$) dell'unità al sottocampo primo K_1 di K, allora il sottocampo $K_\infty \cap K$ ha grado finito su K_1.*

La dimostrazione del teorema precedente si può trovare in forma dettagliata, sebbene solo nel caso di caratteristica 0, nella monografia [**109**] (Theorem 5.4, p. 209). La verifica per il caso di caratteristica positiva non è molto diversa (si veda [**89**], Theorem 1 e [**18**], Theorem C). Nello stesso volume S.K. Seghal ha posto il problema di caratterizzare completamente gli anelli gruppali in cui gli elementi invertibili formano un FC-gruppo (Problem 37, p. 231). E' stato lo stesso Seghal a risolvere il problema, in un articolo in collaborazione con G.H. Cliff [**18**]; questo paragrafo è dedicata all'esposizione dei loro risultati.

Lemma 2.29. *Siano K un campo e G un gruppo tali che KG sia infinito e $\mathcal{U}(KG)$ sia un FC-gruppo. Allora il sottogruppo di torsione T di G è abeliano e ogni suo sottogruppo è normale in G.*

Dimostrazione − Si supponga per assurdo che esistono degli elementi $t \in T$ e $g \in G$ tali che $g^{-1}tg \notin \langle t \rangle$. Sia n il periodo di t e per ogni $c \in K$ si ponga

$$a_c = 1 + c(t-1)g\sum_{i=1}^{n} t^i.$$

Allora a_c è invertibile e

$$a_c^{-1} = 1 - c(t-1)g\sum_{i=1}^{n} t^i,$$

in quanto $(t-1)\sum_{i=1}^{n} t^i = 0$. Inoltre

$$\begin{aligned} a_c^{-1}ta_c &= \big(1 - c(t-1)g\sum_{i=1}^{n} t^i\big)t\big(1 + c(t-1)g\sum_{i=1}^{n} t^i\big) \\ &= \big(t - c(t-1)g\sum_{i=1}^{n} t^i\big)\big(1 + c(t-1)g\sum_{i=1}^{n} t^i\big) \\ &= t - c(t-1)g\sum_{i=1}^{n} t^i + ct(t-1)g\sum_{i=1}^{n} t^i \\ &= t - 2ctg\sum_{i=1}^{n} t^i + cg\sum_{i=1}^{n} t^i + ct^2g\sum_{i=1}^{n} t^i. \end{aligned}$$

Si assuma in primo che la caratteristica di K non sia 2. Poichè $t^g \notin \langle t\rangle$, si ha che $g \neq tgt^m$ per ogni numero intero positivo m, per cui cg compare nell'espressione di $a_c^{-1}ta_c$. D'altra parte KG è infinito e G è un FC-gruppo, sicchè esistono infiniti elementi dh di KG, con $k \in K$ e $h \in G$ tali che $t^g = t^h$. Tali elementi, seguendo ciò che si è fatto per cg, producono infiniti coniugati di t e questo conduce ad una contraddizione.

Supponiamo ora che K abbia caratteristica 2. Allora $(t^2)^g \in \langle t\rangle$, in quanto altrimenti per ogni $g \neq tgt^m$ per ogni numero intero positivo m, il che produce come prima una contraddizione. Si può assumere, senza ledere la generalità, che il periodo di t sia una potenza di 2. Sia y un qualunque elemento del centralizzante $C_G(\langle t, g\rangle)$, e si ponga

$$b = 1 - cy\sum_{i=1}^{n} t^i.$$

Allora $b = b^{-1}$ e

$$\begin{aligned} b^{-1}gb &= \big(1 + cy\sum_{i=1}^{n} t^i\big)g\big(1 + cy\sum_{i=1}^{n} t^i\big) \\ &= g + cyg\big(\sum_{i=1}^{n} t^i\big) + cy\big(\sum_{i=1}^{n} t^i\big)g + \big(cy\sum_{i=1}^{n} t^i\big)\big(cyg\sum_{i=1}^{n} t^i\big) \\ &= g + cyg\big(\sum_{i=1}^{n} t^i\big) + cyg\big(\sum_{i=1}^{n} (t^i)^g\big) + c^2y^2\big(\sum_{i=1}^{n} (t^i)^g\big)\big(\sum_{i=1}^{n} t^i\big) \end{aligned}$$

$$= g + cyg\big(\sum_{i=1}^{n}(t^i + (t^i)^g)\big) + c^2y^2\big(\sum_{i=1}^{n}(t^i)^g\big)\big(\sum_{i=1}^{n} t^i\big).$$

Poichè $t^g \notin \langle t \rangle$, si ha che ygt appartiene al supporto di $b^{-1}gb$, ottenendo così infiniti coniugati di g al variare degli infiniti valori cy. Questa contraddizione prova che ogni sottogruppo di T è normale in G.

Per assurdo T non sia abeliano, e quindi $T = Q_8 \times A$, dove Q_8 è una copia del gruppo dei quaternioni di ordine 8 ed A è abeliano. Come prima, si supponga anzitutto che K non abbia caratteristica 2. Proveremo in primo luogo che esiste un anello unitario infinito R tale che l'anello $M_2(R)$ delle matrici quadrate di ordine 2 su R sia contenuto in KG. Se K ha caratteristica 0, allora $M_2(\mathbb{Q}) \leq KG$. Sia invece non nulla la caratteristica di K. Poichè il campo primo K_1 di K è un campo finito di ordine dispari, si ha

$$K_1Q_8 = K_1 \oplus K_1 \oplus K_1 \oplus K_1 \oplus M_2(K_1) = 4K_1 \oplus M_2(K_1),$$

e quindi

$$KQ_8 = 4K \oplus M_2(K).$$

Se K è infinito, è sufficiente porre $R = K$. Sia infine K finito, sicchè G è infinito e quindi anche A è infinito oppure G contiene un elemento aperiodico. In ogni caso, esiste un sottogruppo infinito H di G tale che $\langle H, Q_8 \rangle = H \times Q_8$. Allora

$$K(H \times Q_8) = 4KH \oplus M_2(KH)$$

e in questo caso basta scegliere $R = KH$.

Per ogni elemento c di R si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -c^2-1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha infiniti coniugati e questa contraddizione prova in questo caso l'asserto.

Supponiamo ora che K abbia caratteristica 2, e sia

$$Q_8 = \langle i, j \mid i^4 = 1,\ i^2 = j^2,\ i^j = i^{-1} \rangle.$$

Qualunque siano gli elementi $g \in C_G(Q_8)$ e $c \in K$, poniamo $a = 1+cg(1+i)$. Allora

$$a^{-1} = \big(1 + cg(1+i)\big)^3,$$

in quanto $(1+i)^4 = 0$, e risulta

$$aja^{-1} = \big(1 + cg(1+i)\big)j\big(1 + cg(1+i)\big)^3$$
$$= j\big(1 + cg(1+i^{-1})\big)\big(1 + cg(1+i) + c^2g^2(1+i)^2 + c^3g^3(1+i)^3\big)$$

$$= j\big(1 + cg(1 + i^{-1}) + c^2g^2(1 + i + i^2 + i^3)\big).$$

Quindi il prodotto jig appare in aja^{-1} con coefficiente c per gli infiniti valori di cg e perciò l'elemento j ha infiniti coniugati. Quest'ultima contraddizione completa la dimostrazione del lemma. □

Teorema 2.30. (S.K. Seghal e G.H. Cliff [**18**]) *Siano K un campo finito di caratteristica positiva p e G un gruppo privo elementi di periodo p. Allora $\mathcal{U}(KG)$ è un FC-gruppo se e soltanto se vale una delle seguenti condizioni:*

(1) *KG è finito oppure abeliano;*
(2) *G è un FC-gruppo infinito non abeliano il cui sottogruppo di torsione T è abeliano finito ed inoltre ogni idempotente di KT è centrale in KG;*
(3) *G è un FC-gruppo non abeliano il cui sottogruppo di torsione T è centrale e inoltre $T = Q \times B$, con B finito, $Q \simeq Z(q^\infty)$ per qualche numero primo $q \neq p$ e $G' \leq Q$.*

Dimostrazione − Si supponga che $\mathcal{U}(KG)$ sia un FC-gruppo, e che KG sia infinito e non abeliano, sicchè ovviamente G è un FC-gruppo infinito non abeliano. Si proverà in primo luogo che se il sottogruppo di torsione T di G è finito, allora vale la condizione (2). In primo luogo, T è abeliano per il Lemma 2.29. Sia e un idempotente di KT. Al fine di provare che e è centrale, per il Theorem II.16 di [**1**] è lecito assumere che e è un idempotente primitivo di KT.* Qualunque sia l'elemento g di G, si ha $e^g = e$ oppure $e^ge = 0$. Infatti, poichè e^ge è un idempotente di KT e $e^ge \in eKTe$, per l'esercizio 23(ii) a pag.66 di [**87**], $e^ge = 0$ oppure $e^ge = e$; essendo e^g un idempotente primitivo in virtù dell'esercizio 14 di pag.334 di [**75**], da $e^ge = e$ segue che $e^g = e$. Dimostriamo ora che e è centrale. Per assurdo si supponga che $e^x \neq e$ per qualche $x \in G$ e sia g un elemento di $C_G(\langle x, T_1\rangle)$; allora $a = 1 + xge$ è un elemento invertibile e $a^{-1} = 1 - xge$. Pertanto

$$a^{-1}xa = x - xg(ex - xe) - g^2x^3e^{x^2}e,$$

e l'ultimo termine coincide con zero oppure con g^2x^3e. Poichè $ex \neq xe$, esiste $h \in Supp(ex - xe)$, ed allora xgh pu apparire nel supporto di g^2x^3e soltanto per un numero finito di valori di g. Esistono perciò infiniti coniugati di x corrispondenti agli infiniti valori di g, e questa contraddizione prova che e è centrale in KG.

---

*Se R è un anello, due elementi idempotenti e ed f di R si dicono *ortogonali* se $ef = fe = 0$; un elemento idempotente $e \neq 0$ si dice *primitivo* se non è somma di due elementi idempotenti ortogonali non nulli. Nell'insieme degli elementi idempotenti di un anello R si può definire una relazione d'ordine ponendo $e \leq f$ se e soltanto se $ef = fe = e$; gli elementi idempotenti primitivi di R sono esattamente gli idempotenti non nulli minimali rispetto a tale relazione d'ordine.

Si supponga quindi che T è infinito; si proverà che in questa situazione sussiste la condizione (3). Siano x e y elementi di G tali che $xy \neq yx$ e si ponga $t = [x, y]$. Allora $t \in T$ e per ipotesi il periodo $o(t)$ di t è primo con p. Sia

$$\widehat{t} = (1/o(t)) \sum_{j=1}^{o(t)} t_j,$$

e quindi

$$KT = \widehat{t}KT \oplus (1-t)KT.$$

D'altra parte $(1-t)KT$ non può avere infiniti elementi idempotenti e_i, altrimenti x avrebbe infiniti coniugati x^{u_i}, dove $u_i = e_i y + (1 - e_i)$. Ne segue che $(1-t)KT$ ha idempontenti primitivi e quindi, per il Lemma 14.4.3 di [**87**], si ha $T = Q \times B$, con Q di tipo q^∞ per qualche numero primo $q \neq p$ e B finito. Per assurdo esistano elementi x e y di G tali che $t = [x, y]$ non appartenga a Q. Per ogni numero intero positivo n si denoti con Q_n il sottogruppo di ordine q^n di Q; la considerazione della catena di sottogruppi

$$Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n < Q_{n+1} < \ldots$$

permette di ottenere infiniti idempotenti della forma

$$e_n = (1/q^n) \sum_{h \in Q_n} h.$$

Posto $u_n = e_n y + (1 - e_n)$, si ha

$$\begin{aligned} u_n^{-1} x u_n &= \big(e_n y^{-1} + (1-e_n)\big) x \big(e_n y + (1-e_n)\big) \\ &= x\big(e_n t + (1-e_n)\big); \end{aligned}$$

Inoltre, qualunque siano i numeri interi positivi m e n risulta

$$u_m^{-1} x u_m = u_n^{-1} x u_n \iff e_m(1-t) = e_n(1-t) \iff e_m = e_n.$$

Pertanto $\{x^{u_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un insieme infinito di coniugati di x, il che contraddice l'ipotesi che $\mathcal{U}(KG)$ sia un FC-gruppo e prova che G' è contenuto in Q. Per il Lemma 2.29 si ha

$$[G, B] \leq Q \cap B = \{1\}$$

e quindi B è centrale; infine, Q è centrale poichè G è un FC-gruppo e quindi T è un sottogruppo centrale di G.

Reciprocamente, è banale che se è verificata la condizione (1) allora $\mathcal{U}(KG)$ è un FC-gruppo. Si supponga quindi che per il gruppo G valga la condizione (2). Allora KT è una somma diretta di campi finiti $K_1, \ldots, K_r$. Per il Lemma 2.4 di [**110**] applicato alla nostra situazione si ha che ogni elemento $u \in \mathcal{U}(KG)$ può essere scritto nella forma

$$u = \sum_{i=1}^{r} k_i g_i,$$

con $k_i \in K_i$ e $g_i \in G$. Se

$$v = \sum_{i=1}^{r} l_i h_i$$

è un qualunque altro elemento di $\mathcal{U}(KG)$ (con $l_i \in Ki$ e $h_i \in G$), si ha

$$u^v = \sum_{i=1}^{r} (k_i g_i)^{l_i h_i} = \sum_{i=1}^{r} k_i^{h_i} g_i^{l_i h_i} = \sum_{i=1}^{r} k_i^{h_i} (l_i^{-1}) g_i^{h_i} l_i^{h_i},$$

e quindi u ha un numero finito di coniugati in $\mathcal{U}(KG)$ in quanto ciascun K_i è finito.

Si supponga infine che vale la condizione (3), e sia u un qualunque elemento di $\mathcal{U}(KG)$. Allora il sottogruppo di torsione del sottogruppo generato dal supporto $Supp(u)$ di u è contenuto in $\langle t_1 \rangle \times B$ per un opportuno $t_1 \in Q$. Ma $K(\langle t_1 \rangle \times B)$ è somma diretta di campi $K_1, \dots, K_r$ con $r \geq 1$, e dal Lemma 2.4 di [**110**], applicato alla nostra situazione, segue che

$$u = \sum_{i=1}^{r} k_i g_i,$$

con $k_i \in K_i$ e $g_i \in G$. Sia G_1 il sottogruppo generato da $Supp(u)$ e dagli elementi $g_1, \dots, g_r$; allora il sottogruppo di torsione di G_1 è contenuto in $\langle t \rangle \times B$ per un opportuno elemento t di Q. Posto

$$\widehat{t} = (1/o(t)) \sum_{j=1}^{o(t)} t_j,$$

si ha

$$A = K(\langle t \rangle \times B) = \widehat{t}A \oplus (1-t)A, \qquad KT = \widehat{t}KT \oplus (1-t)KT.$$

E' noto che ogni idempotente di $(1-t)A$ è addendo di un idempotente di $(1-t)K\langle t \rangle$ e che ogni idempotente di $(1-t)K\langle t \rangle$ è somma di al più s idempotenti primitivi ortogonali di $(1-t)KQ$, con s dipendente solo da $\langle t \rangle$ (cfr. [**87**], p.690). Ne segue che ogni idempotente di $(1-t)A$ è una somma di al più $|B|s$ idempotenti primitivi ortogonali di KT. Per assurdo l'elemento u abbia $n+1$ coniugati $u^{v_1}, \dots, u^{v_{n+1}}$, dove $n = |B|\, o(t)^2 s$, e sia t' un elemento di Q tale che $\langle t' \rangle \times B$ contenga il sottogruppo di torsione del sottogruppo generato da G_1 e da $v_1, \dots, v_{n+1}$. Si ha allora una decomposizione in somma di campi

$$K(\langle t' \rangle \times B) = \sum F_i.$$

Si scriva

$$u = \sum \alpha_i l_i$$

e, per un qualunque $j = 1, \dots, n+1$,

$$v = v_j = \sum \beta_i h_i$$

con gli elementi α_i, β_i in F_i e gli elementi l_i, h_i in G, dove $l_i = g_i$. Allora risulta

$$u^v = \sum \alpha_i l_i^{h_i} = \sum \alpha_i l_i t_i,$$

dove $t_i = t^{b_i}$ per un certo intero b_i. Osserviamo che se $\alpha_i l_i t_i \neq \alpha_i l_i$, si ha anche $\alpha_i l_i(1 - t_i) \neq 0$ e così $\alpha_i l_i(1 - t) \neq 0$. Ma esistono al più $o(t)s|B|$ valori di i tali che $\alpha_i l_i(1 - t) \neq 0$, e quindi i coniugati u^v di u sono al più $s|B|o(t)^2$, e questa contraddizione completa la prova del teorema. □

Più snella appare la caratterizzazione nel caso degli anelli gruppali KG quando K ha caratteristica positiva p e il gruppo G contiene elementi di periodo p.

Lemma 2.31. *Siano K un campo di caratteristica positiva p e G un gruppo. Se $\mathcal{U}(KG)$ è un FC-gruppo infinito, allora ogni p-elemento di G è centrale.*

Dimostrazione − Supponiamo per assurdo che esistano in G un elemento x di G di periodo p^n ed un elemento g tali che $x^g \neq x$. Poichè il sottogruppo di torsione T di G è abeliano per il Lemma 2.29, l'elemento g è aperiodico. Inoltre ancora dal Lemma 2.29 segue che $\langle x \rangle$ è normale in G, per cui si ha

$$\big(g^m(1 - x)\big)^{p^n} = 0$$

per ogni numero intero positivo m. Pertanto l'elemento $u_m = 1 + g^m(1 - x)$ è invertibile e il suo inverso è u_m^{p-1}, e risulta

$$\begin{aligned} u_m g u_m^{-1} &= \big(1 + g^m(1 - x)\big) g u_m^{-1} \\ = g\big(1 + g^m(1 - x^g)\big) u_m^{-1} &= g\big(u_m + g^m(x - x^g)\big) u_m^{-1} \\ = g\big(1 + g^m(x - x^g)&(1 + g^m(1 - x))^{p^n - 1}\big). \end{aligned}$$

Poiché g è aperiodico, il prodotto $g^{m+1}x$ appartiene a $Supp(u_m g u_m^{-1})$ e quindi g ha infiniti coniugati in $\mathcal{U}(KG)$. Questa contraddizione completa la dimostrazione. □

Teorema 2.32. (S.K. Seghal e G.H. Cliff [**18**], C. Polcino Milies [**88**]) *Siano K un campo di caratteristica positiva p e G un gruppo contenente elementi di periodo p. Allora $\mathcal{U}(KG)$ è un FC-gruppo se e soltanto se vale una delle seguenti condizioni:*

(1) *KG è finito oppure abeliano;*
(2) *$p = 2$, il derivato G' di G ha ordine 2 e il sottogruppo di torsione T di G è della forma $T = G' \times A$, dove A è un sottogruppo centrale di G di ordine dispari.*

Dimostrazione – Supponiamo che G sia un gruppo non abeliano tale che KG sia infinito e $\mathcal{U}(KG)$ sia un FC-gruppo. Siano x e y elementi di G tali che $xy \neq yx$. Per il Lemma 2.29 il sottogruppo T è abeliano e quindi si può assumere che x sia aperiodico. Sia t un elemento di G di periodo p. Poichè t è centrale in G per il Lemma 2.31, si ha

$$\big(x(1-t)\big)^p = x^p(1-t)^p = 0.$$

Posto $a_x = 1 + x(1-t)$, si ha $a_x^p = 1$ e così a_x è invertibile e

$$a_x^{-1} = \big(1 + x(1-t)\big)^{p-1}.$$

Inoltre risulta

$$\begin{aligned}
a_x y a_x^{-1} &= \big(1 + x(1-t)\big) y a_x^{-1} = y\big(1 + x^y(1-t)\big) a_x^{-1} \\
&= y\big(1 + x(1-t) + (x^y - x)(1-t)\big) a_x^{-1} \\
&= y\big(1 + (x^y - x)(1-t)(1 + x(1-t))^{p-1}\big) \\
&= y + y(-x - x^y t)\big(1 + x(1-t)\big)^{p-1} + y(x^y + xt)\big(1 + x(1-t)\big)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Poichè x è aperiodico e il gruppo quoziente G/T è abeliano senza torsione, si ha $yx \in Supp(a_x y a_x^{-1})$ a meno che $-x - x^y t = 0$ e $xy \in Supp(a_x y a_x^{-1})$ a meno che $x^y + xt = 0$. D'altra parte esistono infiniti elementi x' di $G \setminus T$ tali che $y^x = y^{x'}$, per cui si può concludere che $-x - x^y t = 0$ e $x^y + xt = 0$. Pertanto K ha caratteristica 2, risulta $t = y^{-1}x^{-1}yx$ per ogni coppia (x, y) di elementi non permutabili di G e si ha $t^2 = 1$; allora t è l'unico elemento di periodo 2 di T. Poichè T è abeliano, si ottiene $T = \langle t \rangle \times A$, dove A è un sottogruppo privo di elementi di periodo 2. Qualunque siano gli elementi a di A e g di G, il coniugato a^g appartiene a $\langle a \rangle$ e quindi $a^g = a$, in quanto $G' = \langle t \rangle$ e at non appartiene a $\langle a \rangle$. Pertanto A è contenuto in $Z(G)$. Se per assurdo A fosse infinito, KA conterrebbe una famiglia infinita elementi idempotenti $(e_i)_{i \in I}$; considerati allora due qualunque elementi non permutabili x e y di G, l'elemento y avrebbe gli infiniti coniugati

$$\big(x^{-1}e_i + (1-e_i)\big) y \big(x e_i + (1-e_i)\big).$$

Pertanto in questo caso vale la condizione (2).

Si assuma viceversa che vale la condizione (2), e si supponga in primo luogo che $G' = T$; si proverà che in questo caso ogni elemento invertibile u di KG ha al più due coniugati. Poichè G/T è abeliano senza torsione, ogni elemento invertibile dell'anello gruppale $K(G/T)$ è multiplo di un elemento di G/T (per il Teorema 12.1.11 di [**87**]), e quindi esistono elementi $c \in K$, $g \in G$, $a \in KG$ tali che $u = cg + a(1+t)$, con t generatore di T. Si osservi che l'elemento $a(1+t)$ è centrale in KG. Infatti, poichè G/T è abeliano, per ogni $x \in G$ esiste $b \in KG$ tale che $a^x = a + b(1+t)$; ma $(1+t)^2 = 0$ e quindi

$$\big(a(1+t)\big)^x = a^x(1 + t^x) = \big(a + b(1+t)\big)(1+t) = a(1+t).$$

Siano $v \in \mathcal{U}(KG)$ e $d \in K,\ h \in G,\ b \in KG$ elementi tali che $v = dh+b(1+t)$. Allora

$$u^v = \big(cg + \alpha(1+t)\big)^v = cg^v + a(1+t).$$

Inoltre

$$v^{-1} = d^{-1}h^{-1} + d^{-2}h^{-2}b(1+t)$$

e infine

$$\begin{aligned} cg^v &= c\big(d^{-1}h^{-1} + d^{-2}h^{-2}b(1+t)\big)g\big(dh + b(1+t)\big) \\ &= c\big(d^{-1}h^{-1}g + d^{-2}h^{-2}b(1+t)g\big)\big(dh + b(1+t)\big) \\ &= c\big(g^h + d^{-1}h^{-1}(g+g^h)b(1+t)\big). \end{aligned}$$

Se $g^h = g$, si haa $cg^v = cg$, mentre se $g^h \neq g$, allora $g^h = gt$ e così $cg^v = cgt$. Ne segue che u ha al più due coniugati.

Supposto quindi $T = G' \times A$, con A sottogruppo centrale finito di G di ordine dispari $n > 1$, per assurdo si assuma che esiste un elemento invertibile u di (KG) dotato di $2^n + 1$ coniugati distinti

$$u^{a_1}, u^{a_2}, \ldots, u^{a_{2^n+1}}.$$

Sia G_1 il sottogruppo di G generato da T e dal supporto degli elementi

$$u, a_1, a_2, \ldots, a_{2^n+1}.$$

Si ha allora evidentemente che u appartiene a $\mathcal{U}(KG_1)$ e gli elementi

$$u^{a_1}, u^{a_2}, \ldots, u^{a_{2^n+1}}$$

sono coniugati a u in $\mathcal{U}(KG_1)$. Poichè G_1/G' è un gruppo abeliano finitamente generato, esiste un sottogruppo senza torsione B/G' di G_1/G' tale che

$$G_1/G' = B/G' \times L/G'.$$

Ma A è un sottogruppo centrale di G, per cui $G_1 = A \times B$ e B' è il sottogruppo di torsione di B e quindi

$$KG_1 = K(A \times B) = (KA)B.$$

D'altra parte A un gruppo abeliano finito di ordine dispari, sicchè KA è isomorfo alla somma diretta di al più n campi $K_1, \ldots, K_n$. Pertanto

$$KG_1 \simeq \sum_{i=1}^{n} K_i B$$

e

$$\mathcal{U}(KG_1) \simeq \prod_{i=1}^{n} \mathcal{U}(K_i B).$$

Dalla prima parte segue che ogni elemento invertibile di K_iB ha al più due coniugati e quindi ogni elemento invertibile di KG_1 ha al più 2^n coniugati, in contraddizione con l'esistenza di $2^n{+}1$ coniugati di u. Questa contraddizione completa la dimostrazione del teorema. $\square$

Esistono vari articoli che descrivono gli anelli gruppali RG in cui il gruppo degli elementi invertibili ha la proprietà FC, per particolari scelte dell'anello R. E' il caso di citare ancora il lavoro di Seghal e Zassenhaus del 1977 che esamina anche il caso $R = \mathbb{Z}$ e quello di H. Merklen e C. Polcino Milies ([**83**]) per l'anello degli interi p-adici $\mathbb{Z}_{(p)}$.

I risultati qui esposti sono stati punto di partenza per ulteriori approfondimenti, a riprova di un costante interesse per l'argomento; ci limitiamo qui a menzionare i contributi di C. Polcino Milies e S. K. Sehgal [**90**] e quello di S.P. Coelho e C. Polcino Milies [**19**].

6. Problemi reticolari e FC-gruppi

Sia G un gruppo. L'insieme $\mathfrak{L}(G)$ di tutti i sottogruppi di G è munito in modo naturale di una struttura di reticolo, con le operazioni di intersezione e di sottogruppo generato da due sottogruppi. Un classico ramo della teoria dei gruppi, con sviluppi anche molto recenti, riguarda l'analisi della reciproca influenza tra il gruppo G ed il reticolo $\mathfrak{L}(G)$. Se G e $\bar{G}$ sono gruppi, un isomorfismo tra i reticoli $\mathfrak{L}(G)$ e $\mathfrak{L}(\bar{G})$ si chiama anche una *proiettività* tra i gruppi G e $\bar{G}$; una classe di gruppi $\mathfrak{X}$ si dice *proiettivamente invariante* se ogni gruppo reticolarmente isomorfo ad un $\mathfrak{X}$-gruppo appartiene ancora alla classe $\mathfrak{X}$. Si verifica facilmente che tra le classi di gruppi proiettivamente invarianti vi sono quelle dei gruppi finiti, dei gruppi ciclici, dei gruppi periodici, dei gruppi localmente finiti. E' anche noto che la classe dei gruppi risolubili è proiettivamente invariante. D'altra parte esiste ovviamente una proiettività tra il gruppo simmetrico $Sym(3)$ ed il gruppo abeliano di ordine 9 ed esponente 3; pertanto la classe dei gruppi abeliani non è proiettivamente invariante, e la stessa osservazione vale per la classe dei gruppi nilpotenti.

Sia $\mathfrak{L}$ un reticolo. Un elemento a di $\mathfrak{L}$ si dice *modulare* se risulta

$$(a \vee x) \wedge y = a \vee (x \wedge y)$$

qualunque siano gli elementi x e y di $\mathfrak{L}$ tali che $a \leq y$ e

$$(a \vee x) \wedge y = x \vee (a \wedge y)$$

per ogni coppia (x, y) di elementi di $\mathfrak{L}$ tali che $x \leq y$. Il reticolo $\mathfrak{L}$ si dice *modulare* se ogni suo elemento è modulare, cioè se in $\mathfrak{L}$ vale l'identità

$$(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$$

per ogni terna (x, y, z) di elementi tali che $x \leq z$.

La ben nota identità di Dedekind assicura che il reticolo dei sottogruppi di un qualunque gruppo abeliano è modulare, e la modularità può essere considerata come la traduzione naturale della commutatività di un gruppo, anche se ovviamente esistono molti gruppi non abeliani il cui reticolo dei sottogruppi è modulare. La struttura dei gruppi modulari è stata completamente descritta da K. Iwasawa [**62**], [**63**] e R. Schmidt [**105**]. Sia p un numero primo, e sia il gruppo $G = \langle x \rangle \ltimes P$ prodotto semidiretto di un p-gruppo abeliano elementare infinito P e di un sottogruppo ciclico $\langle x \rangle$ di ordine primo q tale che $a^x = a^k$ per ogni $a \in P$, dove $1 < k < p$. E' facile provare che il reticolo dei sottogruppi di G è isomorfo a quello di un gruppo abeliano (ed in particolare è modulare); d'altra parte G non è un FC-gruppo, in quanto la classe di coniugio di x in G è infinita. Pertanto neppure la classe degli FC-gruppi è proiettivamente invariante, e non è quindi possibile fornirne una caratterizzazione reticolare. D'altra parte, F. de Giovanni e C. Musella [**48**] hanno recentemente dimostrato che per i gruppi finitamente generati la proprietà FC può essere descritta reticolarmente, ed hanno inoltre provato che la classe dei gruppi FC-ipercentrali è proiettivamente invariante (un gruppo G si dice *FC-ipercentrale* se la *serie FC-centrale superiore* di G, definita a partire dall'FC-centro in analogia con la serie centrale superiore, termina con G). Questi risultati si basano sul notevole teorema di G. Zacher [**120**] e I.A. Rips che assicura l'invarianza reticolare della finitezza dell'indice di un sottogruppo, e sulla caratterizzazione reticolare di tale proprietà fornita da R. Schmidt [**105**].

Negli ultimi anni molta attenzione è stata dedicata alla possibilità di interpretare dal punto di vista reticolare i risultati di Neumann descritti nel paragrafo 2 e riguardanti i gruppi nei quali tutti i sottogruppi verificano una condizione di normalità generalizzata. Si noti che ogni sottogruppo normale di un gruppo G è un elemento modulare del reticolo $\mathfrak{L}(G)$, e quindi che l'immagine di un sottogruppo normale di G mediante una qualunque proiettività

$$\varphi : \mathfrak{L}(G) \longrightarrow \mathfrak{L}(\bar{G})$$

è un sottogruppo modulare di $\bar{G}$ (cioè un elemento modulare di $\mathfrak{L}(\bar{G})$); per un sottogruppo la modularità può essere allora considerata come la naturale traduzione reticolare della normalità.

Sia G un gruppo. Un sottogruppo X di G si dice *almost modulare* se esiste un sottogruppo di indice finito Y di G contenente X e tale che X sia un elemento modulare del reticolo $\mathfrak{L}(Y)$; il sottogruppo X si dice invece *nearly modulare* in G se esiste un sottogruppo modulare M di G contenente X e tale che l'indice $|M : X|$ sia finito. L'invarianza reticolare della finitezza dell'indice di un sottogruppo assicura che i concetti appena introdotti sono di natura pienamente reticolare, e possono essere riprodotti in un arbitrario reticolo completo. In particolare, le immagini dei sottogruppi almost normali di un gruppo G mediante una proiettività

$$\varphi : \mathfrak{L}(G) \longrightarrow \mathfrak{L}(\bar{G})$$

sono sottogruppi almost modulari di $\bar{G}$, e similmente l'immagine H^φ di un qualunque sottogruppo nearly normale H di G è un sottogruppo nearly modulare di $\bar{G}$. Il prossimo risultato è il corrispondente reticolare del Teorema 2.11. Si ricordi che, se G è un gruppo periodico, $\pi(G)$ denota l'insieme dei numeri primi che sono periodi di elementi di G.

Teorema 2.33. (F. de Giovanni, C. Musella e Y.P. Sysak [**49**]) *In un gruppo periodico G ogni sottogruppo è almost modulare se e soltanto se risulta $G = M \times K$, dove M è un gruppo con il reticolo dei sottogruppi modulare, K contiene un sottogruppo abeliano di indice finito, $\pi(M) \cap \pi(K) = \emptyset$ ed esiste un sottogruppo normale finito N di K tale che il reticolo dei sottogruppi di K/N sia modulare. In particolare, G contiene un sottogruppo di indice finito il cui reticolo dei sottogruppi è modulare.*

Un corrispondente risultato reticolare è stato ottenuto anche per il Teorema 2.14. Si ha infatti:

Teorema 2.34. (M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella e Y.P. Sysak [**28**]) *In un gruppo periodico G ogni sottogruppo è nearly modulare se e soltanto se G contiene un sottogruppo normale finito N tale che il reticolo dei sottogruppi di G/N sia modulare.*

Per quanto riguarda l'interpretazione reticolare del Teorema 2.17, occorre tenere presente che, nonostante la finitezza dell'indice di un sottogruppo sia un invariante reticolare, non è invariante per proiettività l'indice di un sottogruppo; per rendersi conto di ciò è sufficiente notare che due qualunque gruppi di ordine primo sono ovviamente reticolarmente isomorfi. La conseguente difficoltà nella definizione reticolare dei BCF-gruppi può essere superata in virtù di un risultato ottenuto da M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella e R. Schmidt [**26**]; infatti questi autori hanno provato che se G è un gruppo e H è un sottogruppo di indice finito di G, allora il numero dei fattori primi dell'indice $|G : H|$ (con molteplicità) può essere determinato nel reticolo dei sottogruppi di G.

Un sottogruppo X di un gruppo G si dice *modulare-per-finito* se un contiene un sottogruppo Y di indice finito che sia un elemento modulare del reticolo $\mathfrak{L}(G)$. Evidentemente ogni sottogruppo normale-per-finito è anche modulare-per-finito, e l'immagine di un sottogruppo normale-per-finito di un gruppo G mediante una qualunque proiettività

$$\varphi : \mathfrak{L}(G) \longrightarrow \mathfrak{L}(\bar{G})$$

è un sottogruppo modulare-per-finito di $\bar{G}$.

Un gruppo G si dice un *BMF-gruppo* se esiste un numero intero positivo k tale che ogni sottogruppo X di G contenga un sottogruppo Y di indice finito che sia modulare in G e per il quale il numero dei fattori primi (con molteplicità) di $|X : Y|$ sia al più k. Le considerazioni precedenti assicurano che la proprietà BMF è di natura puramente reticolare; pertanto il prossimo risultato va confrontato con il Teorema 2.17.

Teorema 2.35. (M. De Falco, F. de Giovanni e C. Musella [**23**]) *Sia G un BMF-gruppo localmente finito. Allora G contiene un sottogruppo M di indice finito il cui reticolo dei sottogruppi $\mathfrak{L}(M)$ è modulare.*

Le dimostrazioni dei teoremi 2.33, 2.34 e 2.35 comportano una delicata analisi del comportamento dei sottogruppi quasinormali e dei sottogruppi quasinormali generalizzati (si ricordi che un sottogruppo X di un gruppo G si dice *quasinormale* se risulta $XY = YX$ per ogni sottogruppo Y di G). Per i relativi risultati, si fa riferimento agli articoli [**49**], [**27**], [**22**].

Anche del teorema di Schur è stata ottenuta una interpretazione reticolare. Un sottogruppo X di un gruppo G si dice *modularmente immerso* in G se per ogni elemento g di G il reticolo $\mathfrak{L}(\langle g, X\rangle)$ è modulare. Poichè ovviamente un sottogruppo X di un gruppo G è contenuto nel centro di G se e soltanto se il sottogruppo $\langle g, X\rangle$ è abeliano per ogni $g \in G$, la nozione di sottogruppo modularmente immerso, che è stata introdotta da P.G. Kontorovic e B.I. Plotkin [**68**] nel 1954, è una naturale traduzione reticolare della centralità di un sottogruppo. Pertanto il prossimo risultato consente una lettura reticolare del teorema di Schur.

Teorema 2.36. (M. De Falco, F. de Giovanni e C. Musella [**24**]) *Sia G un gruppo contenente un sottogruppo modularmente immerso di indice finito. Allora esiste un sottogruppo normale finito N di G tale che il reticolo $\mathfrak{L}(G/N)$ sia modulare.*

Si segnala infine che anche i BFC-gruppi sono stati oggetto di ricerche da un punto di vista reticolare; in particolare M. De Falco e C. Musella [**31**] hanno studiato i gruppi primari in cui ogni sottogruppo ciclico è quasinormale in un sottogruppo di indice finito e limitato e quelli in cui ogni sottogruppo ciclico ha indice finito e limitato in un sottogruppo quasinormale.

CAPITOLO 3

Alcuni altri aspetti

Questo capitolo conclusivo è dedicato all'esposizione di alcuni risultati riguardanti argomenti della teoria degli FC-gruppi o ad essa correlati che non sono stati trattati nei capitoli precedenti, ma che sono stati oggetto di ricerche, anche se non ancora conclusive od organiche. Non saranno riportate dimostrazioni, in quanto questi brevi cenni vanno intesi soltanto come possibili spunti per ulteriori sviluppi. Occorre precisare che si è scelto di non fare alcun riferimento alla teoria delle formazioni e delle classi di Fitting nell'universo degli FC-gruppi localmente risolubili, la cui trattazione ci avrebbe portato molto lontano dallo scopo originario di questi appunti.

1. Gruppi con molti FC-sottogruppi

Se $\mathfrak{X}$ è una classe di gruppi, un gruppo G si dice *minimale non-*$\mathfrak{X}$ se non appartiene a $\mathfrak{X}$ ma tutti i suoi sottogruppi propri sono $\mathfrak{X}$-gruppi. La struttura dei gruppi minimali non-$\mathfrak{X}$ è stata studiata per numerose scelte della classe $\mathfrak{X}$. Nell'analisi dei gruppi che hanno in qualche senso molti sottogruppi con la proprietà FC, la prima situazione da esaminare è ovviamente quella dei gruppi minimali non-FC. Nel caso non perfetto la struttura di questi gruppi è pienamente descritta dal prossimo risultato.

Teorema 3.1. (V.V. Belyaev e N.F. Sesekin [**13**]) *Sia G un gruppo con il derivato proprio. Allora G è minimale non-FC se e soltanto se G è un gruppo di Černikov il cui derivato coincide con il residuale finito e non ha sottogruppi G-invarianti infiniti propri e inoltre $G = \langle x, G' \rangle$, dove $x^{p^n} \in G'$ e $x^p \in Z(G)$ per qualche numero primo p.*

Ovviamente ogni gruppo di Tarski è minimale non-FC, per cui esistono gruppi perfetti e minimali non-FC. D'altra parte V.V. Belyaev [**11**] ha dimostrato che un gruppo perfetto localmente finito non può essere minimale non-BFC, sicchè in particolare il Teorema 3.1 caratterizza completamente i gruppi localmente finiti e minimali non-BFC. E' stato inoltre provato da B. Bruno e R.E. Phillips [**14**] che un qualunque gruppo minimale non-FC è numerabile, e che ogni localmente graduato e minimale non-FC è localmente finito, ma non è noto se esistono gruppi minimali non-FC che siano perfetti e localmente finiti. E' importante osservare che V.V. Belyaev [**10**] ha dimostrato che se G è un gruppo perfetto localmente finito e minimale non-FC, allora $G/Z(G)$ è semplice oppure G è un p-gruppo per qualche numero primo p; d'altra parte, poichè M. Kuzucuoğlu e R.E. Phillips [**74**] hanno provato che non esistono gruppi semplici localmente finiti e minimali non-FC, si deduce che un eventuale gruppo perfetto localmente finito e minimale non-FC deve essere un p-gruppo per qualche numero primo p.

In questo ambito sono stati considerati pure gruppi soggetti a restrizioni sulle catene di sottogruppi che non hanno la proprietà FC. Per quanto riguarda la condizione minimale è stato ottenuto il seguente risultato, il quale assicura che, almeno nel caso risolubile, soltanto le situazioni estreme possono verificarsi.

Teorema 3.2. (S. Franciosi, F. de Giovanni e Y.P. Sysak [**45**]) *Sia G un gruppo risolubile che verifica la condizione minimale sui sottogruppi che non hanno la proprietà FC. Allora G è un FC-gruppo oppure un gruppo di Černikov.*

Si osservi che nell'enunciato precedente l'ipotesi di risolubilità può essere indebolita supponendo il gruppo G soltanto dotato di una serie normale discendente i cui fattori sono abeliani oppure finiti.

Anche i gruppi a condizione massimale sui sottogruppi che non hanno la proprietà FC sono stati studiati; rispetto al caso precedente, il comportamento di questi gruppi è più complesso ed è stato descritto da M.R. Dixon e L.A. Kurdachenko ([**38**],[**39**]).

Se $\mathfrak{X}$ è una classe di gruppi, un gruppo G si dice *just-non-$\mathfrak{X}$* se non appartiene a $\mathfrak{X}$ ma ogni suo quoziente proprio è un $\mathfrak{X}$-gruppo. I gruppi just-non-$\mathfrak{X}$ sono stati investigati per numerose scelte della classe $\mathfrak{X}$. In particolare S. Franciosi, F. de Giovanni e L.A. Kurdachenko [**44**] hanno studiato la struttura dei gruppi just-non-FC.

2. Gruppi con molti FC-elementi

E' stato provato da Y.N. Gorčinskiĭ [**57**] che se G è un qualunque gruppo per il quale l'insieme dei periodi degli elementi è finito, allora G si può immergere in un gruppo con un numero finito di classi di coniugio. Pertanto la struttura dei gruppi con un numero finito di classi di coniugio può essere molto complicata; d'altra parte è chiaro che un gruppo con tale proprietà ha soltanto un numero finito di sottogruppi normali e quindi in particolare è finito se è risolubile.

Lo studio dei gruppi con un numero finito di classi di coniugio infinite è stato iniziato da A.V. Izosov e N.F. Sesekin ([**65**],[**64**]) considerando il caso dei gruppi in cui tutti gli elementi che non sono FC-centrali giacciono in un'unica classe di coniugio e quindi quello dei gruppi con esattamente due classi di coniugio infinite. Recentemente M. Herzog, P. Longobardi e M. Maj [**61**] hanno ottenuto ulteriori informazioni sulla struttura dei gruppi con restrizioni sul numero delle classi di coniugio infinite.

Sia G un gruppo che ha soltanto un numero finito di classi di coniugio infinite, e siano F l'FC-centro di G e $x_1, \ldots, x_k$ rappresentanti (mutuamente non coniugati) delle classi di coniugio infinite di G. Poichè la classe di coniugio di x_i è ovviamente contenuta nel laterale x_iG', si ha

$$G = F \cup x_1G' \cup \ldots \cup x_kG',$$

e quindi dal Teorema 1.22 segue che G è un FC-gruppo oppure il suo derivato G' ha indice finito.

Teorema 3.3. (M. Herzog - P. Longobardi - M. Maj [**61**]) *Sia G un gruppo periodico localmente graduato con un numero finito di classi di coniugio infinite. Allora G è un FC-gruppo oppure è nilpotente-per-finito.*

Si osservi che, nella situazione dell'enunciato precedente, l'FC-centro di G deve avere necessariamente indice finito. Infatti, se G non è un FC-gruppo esiste in G un sottogruppo normale nilpotente H di indice finito; poichè ogni classe di coniugio in G costituita da elementi di H si decompone nell'unione di un numero finito di classi di coniugio di H, anche H ha un numero finito di classi di coniugio infinite e allora H è un FC-gruppo, in quanto l'indice $|H : H'|$ è infinito (perchè H è nilpotente e infinito).

A.V. Izosov e N.F. Sesekin [**66**] hanno anche descritto il comportamento dei gruppi con un numero finito di classi di coniugio infinite di sottogruppi, provando tra l'altro che ogni gruppo con questa proprietà ha un numero finito di classi di coniugio infinite di elementi.

3. FC^k-gruppi

Sia FC^0 la classe di tutti i gruppi finiti e per ogni numero intero non negativo n, supposta definita la classe FC^n, si consideri induttivamente la classe FC^{n+1} costituita da tutti i gruppi G tali che $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ ha la proprietà FC^n per ogni elemento x di G. Si è così costruita induttivamente una successione di classi gruppali che generalizzano quella degli FC-gruppi, in quanto quest'ultima coincide evidentemente con la classe FC^1. In [**50**] vari risultati di base sui gruppi con classi di coniugio finite sono stati opportunamente estesi agli FC^k-gruppi per un arbitrario numero intero positivo k; qui ci si limterà ad enunciare alcuni dei risultati ottenuti. In questo ambito è importante in primo luogo il seguente risultato generale sulla struttura degli FC^k-gruppi.

Teorema 3.4. (F. de Giovanni, A. Russo e G. Vincenzi [**50**]) *Sia G un FC^k-gruppo. Allora il k-esimo termine $\gamma_k(G)$ della serie centrale inferiore di G è contenuto nell'FC-centro di G.*

Corollario 3.5. *Sia G un FC^k-gruppo. Allora il sottogruppo $\gamma_{k+1}(G)$ è periodico. In particolare un FC^k-gruppo senza torsione è nilpotente di classe al più k e in un qualunque FC^k-gruppo l'insieme degli elementi periodici è un sottogruppo.*

Per quanto riguarda l'estensione del Teorema 1.3 alla classe dei gruppi con la proprietà FC^k, si ha:

Teorema 3.6. (F. de Giovanni, A. Russo e G. Vincenzi [**50**]) *Sia G un FC^k-gruppo finitamente generato. Allora il gruppo quoziente $G/Z_k(G)$ è finito.*

Ulteriori risultati sui gruppi nella classe FC^k sono stati ottenuti recentemente; in particolare il prossimo teorema riguarda gli FC^k-gruppi (residualmente finiti) in cui ogni sottogruppo è chiuso nella topologia profinita.

Teorema 3.7. (D.J.S. Robinson, A. Russo e G. Vincenzi [**98**]) *Sia G un FC^k-gruppo in cui ogni sottogruppo è intersezione di sottogruppi di indice finito. Allora il gruppo quoziente $G/Z_k(G)$ è al più numerabile.*

Nello stesso articolo gli autori hanno anche costruito alcuni interessanti esempi di FC^k-gruppi, provando in particolare che esiste un FC^2-gruppo che non si può immergere in alcun prodotto diretto di un gruppo periodico e di un gruppo senza torsione (in contrasto con quanto avviene nel caso degli FC-gruppi).

4. Automorfismi ed FC-gruppi

Se G è un gruppo e x è un elemento di G, la classe di coniugio di x in G coincide evidentemente con l'insieme delle immagini di x mediante gli automorfismi interni di G. Sostituendo gli automorfismi interni con gli automorfismi arbitrari, vari problemi sugli FC-gruppi vengono tradotti in altrettante questioni riguardante l'azione dell'automorfo sul gruppo. Il Teorema 1.20 caratterizza i gruppi in cui le classi di coniugio di elementi sono finite e hanno ordine limitato. Per quanto riguarda il caso degli automorfismi sussiste il seguente risultato.

Teorema 3.8. (D.J.S. Robinson e J. Wiegold [**100**]) *In un gruppo G ogni elemento ha un numero finito e limitato di immagini mediante automorfismi se e soltanto se il sottogruppo T costituito dagli elementi periodici di $Z(G)$ è finito e $AutG$ induce su G/T un gruppo finito di automorfismi.*

In analogia al problema risolto da B.H. Neumann con il Teorema 2.11 per i gruppi con classi di coniugio finite di sottogruppi, Robinson e Wiegold hanno anche considerato i gruppi in cui ogni sottogruppo ha un numero finito e limitato di immagini mediante automorfismi. Il loro risultato è stato in seguito migliorato provando che anche in questo caso la limitazione sul numero delle immagini può essere omessa.

Teorema 3.9. (J.C. Lennox, F. Menegazzo, H. Smith e J. Wiegold [**77**]) *In un gruppo ogni sottogruppo ha un mumero finito di immagini mediante automorfismi se e soltanto se $AutG$ è finito oppure $G = G_1 \times G_2$, dove G_1 è un gruppo periodico localmente ciclico, G_2 è un'estensione centrale finita del prodotto diretto di un numero finito di gruppi di Prüfer e $\pi(G_1) \cap \pi(G_2) = \emptyset$.*

Un automorfismo α di un gruppo G si dice *virtualmente triviale* se il sottogruppo

$$C_G(\alpha) = \{x \in G \mid x^\alpha = x\}$$

ha indice finito in G. Allora un gruppo G ha la proprietà FC se e soltanto se ogni suo automorfismo interno è virtualmente triviale, ed il prossimo risultato è quindi naturalmente correlato alla teoria.

Teorema 3.10. (F. Menegazzo e D.J.S. Robinson [**81**]) *Sia G un gruppo i cui automorfismi sono tutti virtualmente triviali. Allora G' è finito e $Z(G)$ è un gruppo ridotto a componenti primarie finite.*

Ulteriori informazioni sui gruppi con tutti gli automorfismi virtualmente triviali possono essere trovate in [**82**].

E' ben noto che la struttura dei gruppi che possono essere realizzati come gruppo di tutti gli automorfismi di qualche gruppo è soggetta a forti restrizioni; ad esempio D.J.S. Robinson [**95**] ha dimostrato che un qualunque gruppo di Černikov infinito non può essere isomorfo all'automorfo di alcun gruppo. Il prossimo risultato prova in particolare che un FC-gruppo periodico numerabile di esponente infinito che sia privo di elementi di periodo 2 non è realizzabile come gruppo di tutti gli automorfismi di un gruppo.

Teorema 3.11. (J. Zimmerman [**121**]) *Sia G un gruppo il cui automorfo $AutG$ è un FC-gruppo periodico numerabile. Se l'insieme $\pi(AutG)$ è finito oppure i 2-sottogruppi di $AutG$ verificano la condizione minimale, allora il gruppo $G/Z(G)$ è finito ed $AutG$ ha esponente finito e contiene un sottogruppo di indice finito Γ tale che $\pi(\Gamma) \subseteq \{2, 3\}$.*

Lo stesso autore ha ottenuto in [**122**] altre restrizioni sulla struttura degli FC-gruppi con questa proprietà. Per quanto riguarda i CC-gruppi, si ha:

Teorema 3.12. (M.R. Dixon [**37**]) *Sia G un gruppo il cui automorfo $AutG$ è un CC-gruppo periodico numerabile. Allora $AutG$ è un FC-gruppo.*

5. Il sottogruppo di Frattini

Qualunque sia il gruppo G, con il simbolo $\Phi(G)$ si denota il *sottogruppo di Frattini* di G, cioè l'intersezione di tutti i sottogruppi massimali di G (ponendo altresì $\Phi(G) = G$ se G è privo di sottogruppi massimali). Le proprietà ed il ruolo del sottogruppo di Frattini nell'ambito dei gruppi finiti sono ben noti; ad esempio, già nel 1885 G. Frattini [**52**] aveva provato che il sottogruppo di Frattini di un gruppo finito è nilpotente, ed è anche immediato osservare che un gruppo finito G è nilpotente se e soltanto se il suo derivato è contenuto in $\Phi(G)$. Molto più difficile risulta lo studio del sottogruppo di Frattini di un gruppo infinito e molto più debole l'influenza del comportamento di $\Phi(G)$ sulla struttura di un arbitrario gruppo G. D'altra parte, l'imposizione di opportune condizioni finitarie sul gruppo permette in varie situazioni di studiare il sottogruppo di Frattini; questo è il caso dei gruppi risolubili finitamente generati, come provato da J.C. Lennox in una serie di articoli degli anni settanta, tra i quali ci si limita qui a menzionare il lavoro [**76**]. Anche nell'universo dei gruppi con classi di coniugio finite è possibile sviluppare una "buona" teoria di Frattini.

Teorema 3.13. (A.M. Trahtenberg [**117**]) *Se G è un FC-gruppo, allora il suo sottogruppo di Frattini $\Phi(G)$ è localmente nilpotente. Inoltre G è localmente nilpotente se e soltanto se G' è contenuto in $\Phi(G)$.*

Il teorema precedente è stato esteso al caso dei PC-gruppi da L.A. Kurdachenko e J. Otal [**71**]; inoltre per i PC-gruppi, sussiste il seguente risultato.

Teorema 3.14. (S. Franciosi e F. de Giovanni [**41**]) *Sia G un PC-gruppo. Se $G/\Phi(G)$ è finito (risp.: periodico), anche il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito (risp.: periodico).*

Si osservi che in [**41**] sono stati dimostrati risultati analoghi se il PC-gruppo G è tale che $G/\Phi(G)$ abbia rango sezionale oppure rango senza torsione finito.

6. Classi di Dietzmann

Una classe $\mathfrak{X}$ di gruppi si dice una *classe di Dietzmann* se ogni volta che per un elemento x di un gruppo G i gruppi $\langle x\rangle$ e $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ appartengono a $\mathfrak{X}$ anche la chiusura normale $\langle x\rangle^G$ di $\langle x\rangle$ in G è un $\mathfrak{X}$-gruppo. Allora il lemma di Dietzmann può essere enunciato affermando che la classe $\mathfrak{F}$ dei gruppi finiti è una classe di Dietzmann, ed è ovviamente da tale considerazione che nasce l'interesse per queste classi gruppali. Anche la classe $\mathfrak{A}$ dei gruppi abeliani è una classe di Dietzmann. Infatti, se x è un elemento di un gruppo G tale che il gruppo quoziente $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ sia abeliano, il derivato G' di G è contenuto in $C_G(\langle x\rangle^G)$ e quindi $G' \leq C_G(x^g)$ per ogni $g \in G$; allora due qualunque coniugati di x sono permutabili e perciò il sottogruppo $\langle x\rangle^G$ è abeliano. Più in generale, per ogni numero intero positivo n i gruppi nilpotenti di classe al più n costituiscono una classe di Dietzmann. Le classi di Dietzmann sono state introdotte e studiate da R. Maier e J.R. Rogé rio ([**80**],[**78**],[**79**]). Tra gli altri risultati ottenuti è stato provato che la classe degli FC-gruppi è una classe di Dietzmann e tale è anche la classe dei gruppi con il derivato finito. Al contrario, i gruppi contenenti un sottogruppo abeliano di indice finito non formano una classe di Dietzmann, e non sono classi di Dietzmann neppure quelle determinate da importanti condizioni finitarie quali la classe dei gruppi di Černikov e quella dei gruppi policiclici. Un altro risultato interessante assicura che per ogni numero cardinale infinito $\aleph$ i gruppi con cardinalità al più $\aleph$ riempiono una classe di Dietzmann. Infine, se $\mathfrak{X}$ è una qualunque classe di Dietzmann, si può dimostrare che anche la classe dei gruppi localmente $\mathfrak{X}$ è di Dietzmann e tale è anche la classe $Z\mathfrak{X}$ costituita dai gruppi G tali che $G/Z(G)$ sia un $\mathfrak{X}$-gruppo; in particolare, la classe dei gruppi con il centro di indice finito è di Dietzmann.

Una classe gruppale $\mathfrak{X}$ si dice una *classe di Schur* se per ogni gruppo G tale che il gruppo quoziente $G/Z(G)$ sia un $\mathfrak{X}$-gruppo, anche il derivato G' di G appartiene a $\mathfrak{X}$. Il teorema di Schur afferma allora semplicemente che la classe $\mathfrak{F}$ dei gruppi finiti è una classe di Schur, mentre il Teorema 2.1 assicura che anche la classe dei gruppi di Černikov è di Schur; non è difficile provare che i gruppi policiclici (o similmente quelli policiclici-per-finiti) formano una classe di Schur (si veda ad esempio [**94**] Part 1, p.115). Altri esempi di classi di Schur determinate da restrizioni sui ranghi sono stati ottenuti in [**42**]. Le classi di Schur sono state studiate anche in [**78**], dove in particolare è stato dimostrato che i gruppi con il derivato finito formano una classe di Schur e che, se $\mathfrak{X}$ è una classe di Schur chiusa rispetto a sottogruppi e quozienti, allora anche la classe dei gruppi localmente $\mathfrak{X}$ e la classe $Z\mathfrak{X}$ sono di Schur. Si osservi infine che non è noto se esistono classi di Dietzmann che non siano classi di Schur.

7. Gruppi inerziali

Un sottogruppo X di un gruppo G si dice *inerte* se l'indice $|X : X \cap X^g|$ è finito per ogni elemento g di G. Evidentemente ogni sottogruppo normale-per-finito (ed in particolare ogni sottogruppo normale) di un gruppo arbitrario è inerte; non è difficile provare che i sottogruppi quasinormali di un gruppo arbitrario sono inerti (cfr. [**97**]). Il gruppo G si dice *inerziale* se tutti i suoi sottogruppi sono inerti. Ovviamente tutti i gruppi finiti e tutti i gruppi di Tarski sono inerziali, mentre nel caso dei gruppi localmente finiti si ha:

Teorema 3.15. (V.V. Belyaev, M. Kuzucuoğlu e E. Seckin [**12**]) *Sia G un gruppo inerziale infinito localmente finito. Allora G non è semplice.*

La classe dei gruppi inerziali contiene tutti i gruppi con classi di coniugio finite. Infatti, sia G un FC-gruppo e sia X un qualunque sottogruppo di G; se g è un elemento di G, il centralizzante $C_G(g)$ ha indice finito in G, e quindi $X \cap C_G(g)$ è un sottogruppo di indice finito in X, che è banalmente contenuto in $X \cap X^g$. Pertanto X è inerte in G, e G è un gruppo inerziale. D'altra parte la considerazione del gruppo diedrale infinito prova che esistono gruppi inerziali che non sono FC-gruppi. Più in generale, risulta inerziale ogni *gruppo diedrale generalizzato*, cioè ogni prodotto semidiretto della forma $\langle x \rangle \ltimes A$, dove x è un elemento di periodo 2, A è un gruppo abeliano e $a^x = a^{-1}$ per ogni elemento a di A. Il prossimo risultato dimostra che i gruppi diedrali generalizzati compaiono frequentemente nella struttura dei gruppi inerziali.

Teorema 3.16. (D.J.S. Robinson [**97**]) *Sia G un gruppo risolubile privo di sottogruppi normali periodici non identici. Allora G è inerziale se e soltanto se è abeliano oppure diedrale generalizzato.*

Il Teorema 3.16 assicura in particolare che ogni gruppo inerziale risolubile è periodico-per-abeliano-per-finito. Nel caso finitamente generato i gruppi inerziali risolubili sono completamente descritti dall'ultimo risultato di questo paragrafo.

Teorema 3.17. (D.J.S. Robinson [**97**]) *Un gruppo risolubile finitamente generato G è inerziale se e soltanto se contiene un sottogruppo normale abeliano senza torsione di indice finito su cui ogni elemento di G induce un automorfismo potenza.*

Bibliografia

[1] A.A. Albert: "Structure of Algebras", *American Mathematical Society Colloquium Publications*, Providence, vol. 24 (1961).

[2] J. Alcazar - J. Otal: "Sylow subgroups of groups with Černikov conjugacy classes", *J. Algebra* 110 (1987), 507–513.

[3] R. Baer: "Der Kern, eine charakeristische Untergruppe", *Compositio Math.* 1 (1934), 254–283.

[4] R. Baer: "Sylow theorems for infinite groups", *Duke Math. J.* 6 (1940), 598–614.

[5] R. Baer: "Finiteness properties of groups", *Duke Math. J.* 15 (1948), 1021–1032.

[6] R. Baer: "Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen", *Math. Ann.* 124 (1952), 161–177.

[7] R. Baer: "Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung", *Math. Ann.* 129 (1955), 139–173.

[8] R. Baer: "Finite extensions of abelian groups with minimum condition", *Trans. Amer. Math. Soc.* 79 (1955), 521–540.

[9] J.C. Beidleman - H. Heineken - M.L. Newell: "Centre and norm", *Bull. Austral. Math. Soc.* 69 (2004), 457–464.

[10] V.V. Belyaev: "Minimal non-*FC*-groups", *Sixth All-Union Symposium on Group Theory (Čerkassy 1978)*, Naukova Dumka, Kiev (1978), 97–102.

[11] V.V. Belyaev: "Groups of the Miller-Moreno type", *Siberian Math. J.* 19 (1978), 356–360.

[12] V.V. Belyaev - M. Kuzucuoğlu - E. Seckin: "Totally inert groups", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 102 (1999), 151–156.

[13] V.V. Belyaev - N.F. Sesekin: "On infinite groups of Miller-Moreno type", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 26 (1975), 369–376.

[14] B. Bruno - R.E. Phillips: "Minimal non-*FC* groups", *Abstracts Amer. Math. Soc.* 2 (1980), 565.

[15] B. Bruno - R.E. Phillips: "Groups with restricted non-normal subgroups", *Math. Z.* 176 (1981), 199–221.

[16] J. Buckley - J.C. Lennox - B.H. Neumann - H. Smith - J. Wiegold: "Groups with all subgroups normal-by-finite", *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 59 (1995), 384–398.

[17] S.N. Černikov: "On the structure of groups with finite classes of conjugate elements", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 115 (1957), 60–63.

[18] G.H. Cliff - S.K. Seghal: “Group rings whose units form an *FC*-group”, *Math. Z.* 161 (1978), 163–168.
[19] S.P. Coelo - C. Polcino Milies: “Group rings whose torsion units form a subgroup”, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 37 (1994), 201–205.
[20] C.D.H. Cooper: “Power automorphisms of a group”, *Math. Z.* 107 (1968), 335–356.
[21] C. David - J. Wiegold: “6-*BFC* groups”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 115 (2006), 265–272.
[22] M. De Falco - F. de Giovanni - C. Musella: “Groups in which every subgroup is permutable-by-finite”, *Comm. Algebra* 32 (2004), 1007–1017.
[23] M. De Falco - F. de Giovanni - C. Musella: “Groups in which every subgroup is modular-by-finite”, *Bull. Austral. Math. Soc.* 69 (2004), 441–450.
[24] M. De Falco - F. de Giovanni - C. Musella: “The Schur property for subgroup lattices of groups”, *Arch. Math. (Basel)* 91 (2008), 97–105.
[25] M. De Falco - F. de Giovanni - C. Musella: “Groups whose finite homomorphic images are metahamiltonian”, *Comm. Algebra* 37 (2009), 2468–2476.
[26] M. De Falco - F. de Giovanni - C. Musella - R. Schmidt: “Detecting the index of a subgroup in the subgroup lattice”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 133 (2005), 979–985.
[27] M. De Falco - F. de Giovanni - C. Musella - Y.P. Sysak: “Groups in which every subgroup is nearly permutable”, *Forum Math.* 15 (2003), 665-677.
[28] M. De Falco - F. de Giovanni - C. Musella - Y.P. Sysak: “Periodic groups with nearly modular subgroup lattice”, *Illinois J. Math.* 47 (2003), 189–205.
[29] M. De Falco - F. de Giovanni - C. Musella - Y.P. Sysak: “Groups with normality conditions for non-abelian subgroups”, *J. Algebra* 315 (2007), 665–682.
[30] M. De Falco - F. de Giovanni - C. Musella - Y.P. Sysak: “On the upper central series of infinite groups”, preprint (2009).
[31] M. De Falco - C. Musella: “Groups whose cyclic subgroups have bounded permutability properties”, *Ricerche Mat.* 57 (2008), 13–25.
[32] F. De Mari - F. de Giovanni: “Groups with few normalizer subgroups”, *Bull. Irish Math. Soc.* 56 (2005), 103–113.
[33] F. De Mari - F. de Giovanni: “Groups with finitely many normalizers of non-abelian subgroups”, *Ricerche Mat.* 55 (2006), 311–317.
[34] F. De Mari - F. de Giovanni: “Groups with finitely many normalizers of infinite index”, *JP J. Algebra Number Theory Appl.* 7 (2007) 83–95.
[35] F. De Mari - F. de Giovanni: “Groups with finitely many normalizers of non-nilpotent subgroups”, *Math. Proc. Roy. Irish Acad.* 107A (2007), 143–152.
[36] A.P. Dietzmann: “On p-groups”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 15 (1937), 71–76.
[37] M.R. Dixon: “Countable periodic *CC*-groups as automorphism groups”, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 35 (1992), 295–299.

[38] M.R. Dixon - L.A. Kurdachenko: "Groups with the maximal condition on non-*BFC* subgroups", *Algebra Colloq.* 10 (2003), 177–193.
[39] M.R. Dixon - L.A. Kurdachenko: "Groups with the maximal condition on non-*BFC* subgroups II", *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 45 (2002), 513–522.
[40] M.R. Dixon - L.A. Kurdachenko: "Groups with the maximal condition on non-*FC* subgroups", *Illinois J. Math.* 47 (2003), 157–172.
[41] S. Franciosi - F. de Giovanni: "Frattini properties of groups with polycyclic-by-finite conjugacy classes", *Boll. Un. Mat. Ital.* 10A (1996), 653–659.
[42] S. Franciosi - F. de Giovanni - L.A. Kurdachenko: "The Schur property and groups with uniform conjugacy classes, *J. Algebra* 174 (1995), 823–847.
[43] S. Franciosi - F. de Giovanni - L.A. Kurdachenko: "On groups with many almost normal subgroups", *Ann. Mat. Pura Appl.* 169 (1995), 35–65.
[44] S. Franciosi - F. de Giovanni - L.A. Kurdachenko: "Groups whose proper quotients are *FC*-groups", *J. Algebra* 186 (1996), 544–577.
[45] S. Franciosi - F. de Giovanni - Y.P. Sysak: "Groups with many *FC*-subgroups", *J. Algebra* 218 (1999), 165–182.
[46] S. Franciosi - F. de Giovanni - M.J. Tomkinson: "Groups with polycyclic-by-finite conjugacy classes", *Boll. Un. Mat. Ital.* (7) 4B (1990), 35–55.
[47] S. Franciosi - F. de Giovanni - M.J. Tomkinson: "Groups with Černikov conjugacy classes", *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 50 (1991), 1–14.
[48] F. de Giovanni - C. Musella: "*FC*-groups and projectivities", *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* 50 (2002), 7–15.
[49] F. de Giovanni - C. Musella - Y.P. Sysak: "Groups with almost modular subgroup lattice", *J. Algebra* 243 (2001), 738–764.
[50] F. de Giovanni - A. Russo - G. Vincenzi: "Groups with restricted conjugacy classes", *Serdica Math. J.* 28 (2002), 241–254.
[51] I.I. Eremin: "Groups with finite classes of conjugate abelian subgroups", *Mat. Sb.* 47 (1959), 45–54.
[52] G. Frattini: "Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni", *Rend. Atti Accad. Naz. Lincei* 1 (1885), 281–85; 455–457.
[53] M. Gonzalez - J. Otal: "The extensions of results due to Gorchakov and Tomkinson from *FC*-groups to *CC*-groups", *J. Algebra* 185 (1996), 314–328.
[54] Y.M. Gorčakov: "Locally normal groups", *Sibirskiĭ Mat. Ž.* 12 (1971), 1259–1272.
[55] Y.M. Gorčakov: "Theorems of Prüfer-Kulikov type", *Algebra i Logika* 13 (1974), 655-661.
[56] Y.M. Gorčakov: "Groups with Finite Classes of Conjugate Elements", *Nauka*, Moscow (1978).
[57] Y.N. Gorčinskiĭ: "Groups with a finite number of conjugacy classes", *Mat. Sb.* 31 (1952), 167–182.
[58] P. Hall: "Finiteness conditions for soluble groups", *Proc. London Math. Soc.* (3) 4 (1954), 419–436.

[59] P. Hall: “Finite-by-nilpotent groups”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 52 (1956), 611–616.
[60] P. Hall: “Periodic *FC*-groups”, *J. London Math. Soc.* 34 (1959), 289–304.
[61] M. Herzog - P. Longobardi - M. Maj: “On generalized *FC*-groups”, *J. Group Theory* 11 (2008), 105–117.
[62] K. Iwasawa: “Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen”, *J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo* 4 (1941), 171–199.
[63] K. Iwasawa: “On the structure of infinite *M*-groups”, *Jap. J. Math.* 18 (1943), 709–728.
[64] A.V. Izosov: “Groups with two infinite classes of conjugate elements”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* 88 (1987), 13–20.
[65] A.V. Izosov - N.F. Sesekin: “Groups with a single infinite class of conjugate elements”, *Studies in Group Theory*, Sverdlovsk (1984), 64–67.
[66] A.V. Izosov - N.F. Sesekin: “Groups with a finite number of infinite classes of conjugate subgroups”, *Ukrain. Math. J.* 40 (1988), 263–267.
[67] M.I. Kargapolov: “On conjugacy of Sylow *p*-subgroups of a locally normal group”, *Uspehi Mat. Nauk* 12 (1957), 297–300.
[68] P.G. Kontorovič - B.I. Plotkin: “Lattices with an additive basis”, *Mat. Sb.* 35 (1954), 187–192.
[69] L.A. Kurdachenko: “On conditions for embeddability of an *FC*-group into the direct product of finite groups and an abelian torsion-free group”, *Math. USSR-Sb.* 42 (1982), 499–514.
[70] L.A. Kurdachenko: “Residually finite *FC*-groups”, *Math. Notes* 39 (1986), 273–279.
[71] L.A. Kurdachenko - J. Otal: “Frattini properties of groups with minimax conjugacy classes”, *Quaderni Mat.* 8 (2001), 221–237.
[72] L.A. Kurdachenko - N.V. Polyakov - I.Y. Subbotin: “On some generalizations of a theorem of B.H. Neumann”, *Math. Contemp.* 21 (2001), 131–145.
[73] N.F. Kuzennyi - N.N. Semko: “Structure of solvable nonnilpotent metahamiltonian groups”, *Math. Notes* 34 (1983), 572–577.
[74] M. Kuzucuoğlu - R.E. Phillips: “Locally finite minimal non-*FC*-groups”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 105 (1989), 417–420.
[75] T.Y. Lam: “A First Course in Noncommutative Rings”, *Springer*, New York (1991).
[76] J.C. Lennox: “Finite Frattini factors in finitely generated soluble groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 41 (1973), 356–360.
[77] J.C. Lennox - F. Menegazzo - H. Smith - J. Wiegold: “Groups with finite automorphism classes of subgroups”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 79 (1988), 87–96.
[78] R. Maier: “Analogues of Dietmann’s lemma”, *Advances in Group Theory 2002*, Aracne Editrice, Roma (2003), 43–69.
[79] R. Maier: “The Dietzmann property of some classes of groups with locally finite conjugacy classes”, *J. Algebra* 277 (2004), 364–369.
[80] R. Maier - J.R. Rogério: “$\mathfrak{X}C$-elements in groups and Dietzmann classes”, *Beiträge Algebra Geom.* 40 (1999), 243–260.

[81] F. Menegazzo - D.J.S. Robinson: "A finiteness condition on automorphism groups", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 78 (1987), 267–277.
[82] F. Menegazzo - M.J. Tomkinson: "Groups with trivial virtual automorphism group", *Israel J. Math.* 71 (1990), 297–308.
[83] H. Merklen - C. Polcino Milies: "Group rings over $\mathbb{Z}_{(p)}$ with *FC* unit groups", *Canad. J. Math.* 32 (1980), 1266–1269.
[84] B.H. Neumann: "Groups with finite classes of conjugate elements", *Proc. London Math. Soc.* (3) 1 (1951), 178–187.
[85] B.H. Neumann: "Groups covered by permutable subsets", *J. London Math. Soc.* 29 (1954), 236–248.
[86] B.H. Neumann: "Groups with finite classes of conjugate subgroups", *Math. Z.* 63 (1955), 76–96.
[87] D.S. Passman: "The Algebraic Structure of Group Rings", *Wiley-Interscience*, New York (1977).
[88] C. Polcino Milies: "Group rings whose units form an *FC*-group", *Arch. Math. (Basel)* 30 (1978), 380–384.
[89] C. Polcino Milies: "Group rings whose units form an *FC*-group: Corrigendum", *Arch. Math. (Basel)* 31 (1978/79), 528.
[90] C. Polcino Milies - S.K. Sehgal: "*FC*-elements in a group ring", *Comm. Algebra* 12 (1981), 1285–1293.
[91] Y.D. Polovickiĭ: "Locally extremal and layer-extremal groups", *Mat. Sb.* 58 (1962), 685–694.
[92] Y.D. Polovickiĭ: "Groups with extremal classes of conjugate elements", *Sibirskiĭ Mat. Ž.* 5 (1964), 891–895.
[93] Y.D. Polovickiĭ: "Groups with finite classes of conjugate infinite abelian subgroups", *Soviet Math. (Iz. VUZ)* 24 (1980), 52–59.
[94] D.J.S. Robinson: "Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups", *Springer*, Berlin (1972).
[95] D.J.S. Robinson: "Infinite torsion groups as automorphism groups", *Quart. J. Math. Oxford* 30 (1979), 351–364.
[96] D.J.S. Robinson: "A Course in the Theory of Groups", seconda edizione, *Springer*, New York (1996).
[97] D.J.S. Robinson: "On inert subgroups of a group", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 115 (2006), 137–159.
[98] D.J.S. Robinson - A. Russo - G. Vincenzi: "On the theory of generalized *FC*-groups", *J. Algebra* (in corso di stampa).
[99] D.J.S. Robinson - S.E. Stonehewer - J. Wiegold: "Automorphisms groups of *FC*-groups", *Arch. Math. (Basel)* 40 (1983), 401–404.
[100] D.J.S. Robinson - J. Wiegold: "Groups with boundedly finite automorphism classes", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 71 (1984), 273–286.
[101] G.M. Romalis - N.F. Sesekin: "Metahamiltonian groups", *Ural. Gos. Univ. Mat. Zap.* 5 (1966), 101–106.
[102] G.M. Romalis - N.F. Sesekin: "Metahamiltonian groups II", *Ural. Gos. Univ. Mat. Zap.* 6 (1968), 52–58.
[103] G.M. Romalis - N.F. Sesekin: "Metahamiltonian groups III", *Ural. Gos. Univ. Mat. Zap.* 7 (1969/70), 195–199.

[104] E. Schenkman: "On the norm of a group", *Illinois J. Math.* 4 (1960), 150–152.

[105] R. Schmidt: "Gruppen mit modularem Untergruppenverband", *Arch. Math. (Basel)* 46 (1986), 118–124.

[106] R. Schmidt: "Subgroup Lattices of Groups", *de Gruyter*, Berlin (1994).

[107] I. Schur: "Neuer Beweis eines Satzes über endliche Gruppen", *Sitzber. Akad. Wiss. Berlin* (1902), 1013–1019.

[108] D. Segal - A. Shalev: "On groups with bounded conjugacy classes", *Quart. J. Math. Oxford* 50 (1999), 505–516.

[109] S.K. Sehgal: "Topics in Group Rings", *Marcel Dekker*, New York (1978).

[110] S.K. Sehgal - H.J. Zassenhaus: "Group rings whose units form an *FC*-group", *Math. Z.* 153 (1977), 29–35.

[111] S.E. Stonehewer: "Locally soluble *FC*-groups", *Arch. Math. (Basel)* 16 (1965), 158–177.

[112] M.J. Tomkinson: "On the commutator subgroup of a periodic *FC*-group", *Arch. Math. (Basel)* 31 (1978), 123–125.

[113] M.J. Tomkinson: "A characterization of residually finite periodic *FC*-groups", *Bull. London Math. Soc.* 13 (1981), 133–137.

[114] M.J. Tomkinson: "On theorems of B.H. Neumann concerning *FC*-groups", *Rocky Mountain J. Math.* 11 (1981), 47–58.

[115] M.J. Tomkinson: "*FC*-groups", *Pitman*, Boston (1984).

[116] M.J. Tomkinson: "*FC*-groups: recent progress", *Infinite Groups 1994 (Ravello)*, *de Gruyter*, Berlin (1996), 271–285.

[117] A.M. Trahtenberg: "The Frattini subgroup of an *FC*-group", *Mat. Issled* 7 (1972), 248–252.

[118] M.R. Vaughan-Lee: "Breadth and commutator subgroups of *p*-groups", *J. Algebra* 32 (1974), 278–285.

[119] J. Wiegold: "Groups with boundedly finite classes of conjugate elements", *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 238 (1957), 389–401.

[120] G. Zacher: "Una caratterizzazione reticolare della finitezza dell'indice di un sottogruppo in un gruppo", *Atti Accad. Naz. Lincei Rend Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8) 69 (1980), 317–323.

[121] J. Zimmerman: "Countable torsion *FC*-groups as automorphism groups", *Arch. Math. (Basel)* 43 (1984), 108–116.

[122] J. Zimmerman: "Some properties of *FC*-groups which occur as automorphism groups", *Proc. Amer. Math. Soc.* 96 (1986), 39–40.